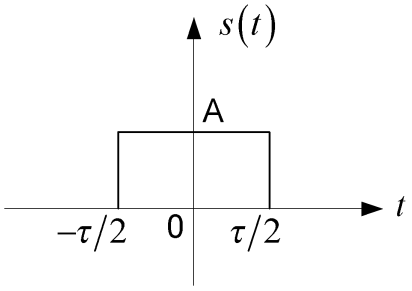
Практичні заняття

за курсом «Сигнали та процеси»
осінній семестр, 2022-2023 навч. рік

Практичне заняття №3

Задача 1.
Задано прямокутний відеоімпульс (рис. 1). Знайти його спектр.



$$s(t)=\begin{cases} A, -\frac{\tau}{2} \le t \le \frac{\tau}{2} \\ 0, -\frac{\tau}{2} > t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Рис. 1

Рішення:
Цей сигнал періодичний чи не періодичний?

Як знайти спектр (спектральну щільність) неперіодичного сигналу?

Спектральна щільність неперіодичного сигналу знаходиться шляхом обчислення **прямого перетворення Фур'є**

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt=$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt=A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt=A\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t}dt=\left|\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right|=A\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}=$$

$$=\frac{A}{-j\omega}\left(e^{-j\omega\tau/2}-e^{j\omega\tau/2}\right)=\left|\begin{matrix}формулаЕйлера\\ \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}=\sin\alpha\end{matrix}\right|=\frac{2A}{\omega}\frac{\left(e^{j\omega\tau/2}-e^{-j\omega\tau/2}\right)}{2j}=\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=$$

$$=\left|\begin{matrix}функціяСинк\\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}=\sin c\alpha\end{matrix}\right|=A\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega/2}\cdot\frac{\tau}{\tau}=A\tau\sin c\frac{\omega\tau}{2}$$

.

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \sin c \frac{\omega\tau}{2}$$

Використаємо інший підхід до розв'язання задачі.
Задана функція є парною чи непарною?

Яке перетворення Фур'є можна використати для парної функції?

Знаючи, що наша функція парна, можна вирішувати за допомогою **косинусного перетворення Фур'є** (для парної функції в сумі для обчислення спектра залишається тільки доданок з косинусом, а інтеграл від парної функції за симетричними межами дорівнює подвоєному інтегралу в половинних межах):

$$\dot{S}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} s(t)\cos\omega t dt = 2\int_0^{\tau/2} A\cos\omega t dt$$

Інтеграл від косинуса дорівнює…

$$\dot{S}(\omega) = 2\int_0^{+\infty} s(t)\cos\omega t dt = 2\int_0^{\tau/2} A\cos\omega t dt = \frac{2A}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\tau/2} = \frac{2A}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\tau}{2} - \sin 0\right) =$$

Синус нуля дорівнює…

$$= \frac{2A}{\omega}\left(\sin\frac{\omega\tau}{2} - 0\right) = \frac{\tau}{\tau}\frac{A\cdot\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega/2} = A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} = A\tau\sin c\frac{\omega\tau}{2}.$$

Результати співпадають.
Зобразимо отриману функцію спектральної щільності прямокутного відеоімпульсу графічно (рис. 2). Нулі функції будуть у точках, де $\sin\frac{\omega\tau}{2} = 0$.

При $\omega = 0$ отримуємо особливу точку з діленням на нуль

$$S(\omega) = S(0) = A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} = A\tau\frac{\sin 0}{0} = A\tau\cdot 1 = A\tau$$

, у цій точці буде максимум функції.

У будь-якій іншій точці функція поводитиметься так: $S(\omega) = A\tau\sin c\frac{\omega\tau}{2} = S(0)\sin c\frac{\omega\tau}{2}$,
тобто як функція синк із нулями в точках:

$\sin\frac{\omega\tau}{2} = 0$ при $\frac{\omega\tau}{2} = n\pi \Rightarrow \omega\tau = 2n\pi \Rightarrow \omega = \frac{2n\pi}{\tau}$,

нулі отримаємо при $\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \frac{6\pi}{\tau}, \ldots$

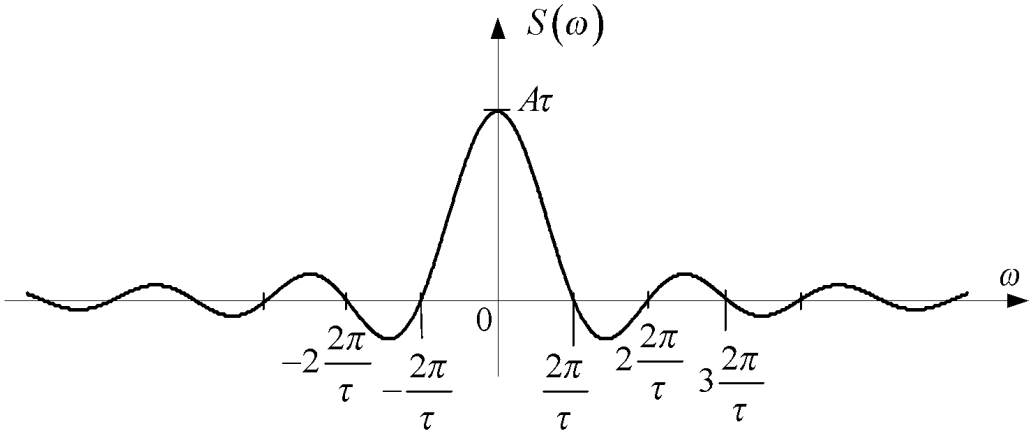


Рис. 2.

При збільшенні τ, тобто розтягуванні імпульсу, відстань між нулями $S(\omega)$ скорочується, тобто звужується спектр. При цьому $S(0)$ збільшується. При стисканні імпульсу у часі відбувається розширення його спектральної щільності, а $S(0)$ зменшується. При $\tau \to 0$ та $A = const$ точки $\omega = \pm\frac{2\pi}{\tau}$ видаляються в нескінченність і спектральна щільність, нескінченно мала за величиною, стає рівномірною у смузі частот від $-\infty$ до $+\infty$. Замалюємо окремо АЧХ (рис. 3) та ФЧХ (рис. 4). У ФЧХ кожна зміна знаку $S(\omega)$ враховується зсувом на π.

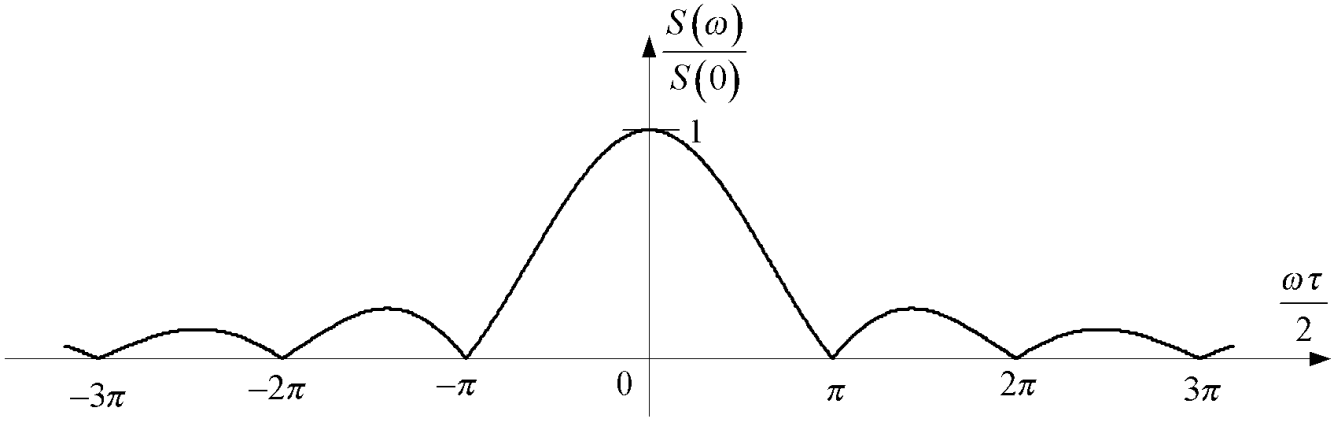


Рис. 3

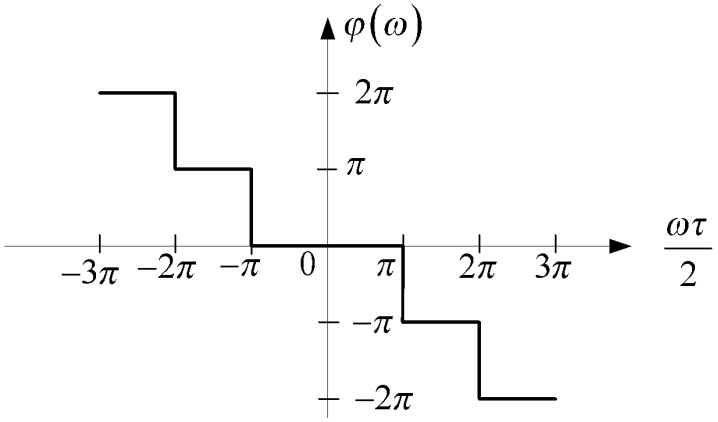


Рис. 4

Якщо початок початкового відеоімпульсу не в точці $t=\frac{\tau}{2}$, а в точці $t=0$ (рис. 5), то відповідно до властивості ПФ про зсув у часі, у ФЧХ спектру з'явиться додатковий доданок, пов'язаний зі зрушенням імпульсу на $\frac{\tau}{2}$ у бік запізнення. АЧХ залишиться без змін.

Задача 2.
Знайти спектральну щільність експонентного відеоімпульсу (рис. 7)
$s(t)=U\exp(-\alpha t),\alpha>0$, для t<0 функція дорівнює 0.

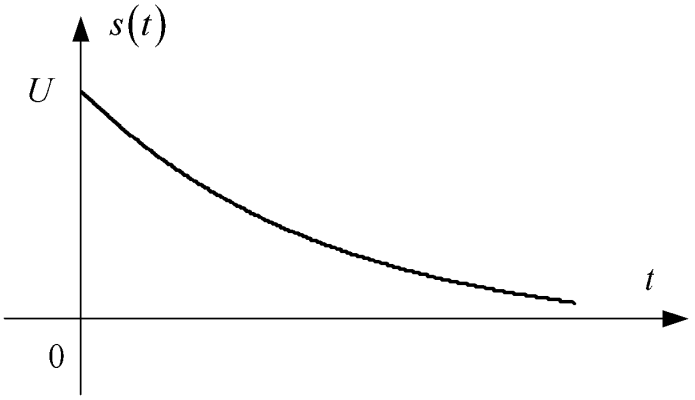


Рис. 7

Рішення:
Цей сигнал періодичний чи ні?

Цей сигнал описується парною функцією чи ні?

Спектральна щільність неперіодичного сигналу знаходиться шляхом обчислення прямого перетворення Фур'є

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}Ue^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}Ue^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=U\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt$$

$$\dot{S}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}Ue^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=U\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+j\omega)t}dt=U\left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{U}{-(\alpha+j\omega)}\left(e^{-\infty}-e^{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\end{array}\right|=\frac{U}{-(\alpha+j\omega)}(0-1)=\frac{U}{\alpha+j\omega}.$$

$$\dot{S}(\omega)=\frac{U}{\alpha+j\omega}$$

Графіки модуля спектральної щільності (АЧХ) та аргументу спектральної щільності (ФЧХ) показані на рис. 8, 9.

Ще нюанс, що ступінь експоненти комплексний $e^{-\infty(\alpha+j\omega)}$. На перший погляд не зовсім ясно, як це трактувати, адже ступінь комплексний. Можна розписати $e^{-\infty(\alpha+j\omega)}=e^{-\infty\alpha}e^{-j\infty\omega}$. Тепер видно, що це добуток, де перший дійсний множник, який у межі прагне до нуля. А другий – комплексна експонента, модуль якої за будь-якого аргументу дорівнює 1. У результаті приходимо до висновку, що $e^{-\infty(\alpha+j\omega)}$ - це комплексне число, модуль якого у межі прагне нулю. Замість нього підставляємо просто 0. Хоча можна на цьому не акцентувати увагу.

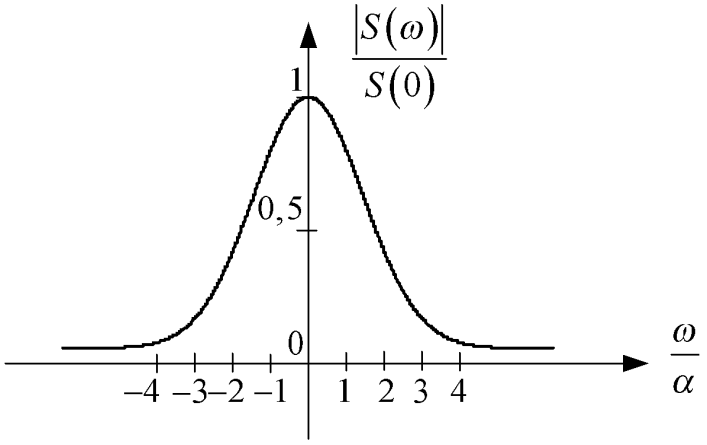


Рис. 8

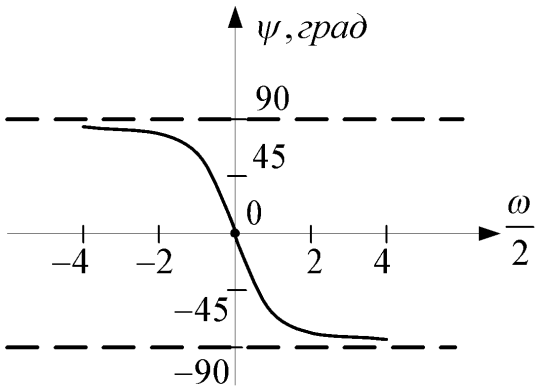


Рис. 9

Особливості спектральної щільності експоненційного коливання:

1) Модуль спектральної щільності $S(\omega)$ не звертається в нуль за жодного кінцевого значення частоти.

2) $\dot{S}(\omega)$ – комплексна величина $\dot{S}(\omega)=|S(\omega)|e^{j\psi(\omega)}$.

Що треба зробити з комплексною спектральною щільністю неперіодичного сигналу, щоб записати АЧХ та ФЧХ?

АЧХ це модуль спектральної щільності

$$|S(\omega)|=\sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(S(\omega)\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(S(\omega)\right)\right)^2}$$

ФЧХ це аргумент спектральної щільності

$$\psi(\omega)=\mathrm{ar}\,ctg\left(\frac{\mathrm{Im}\left(S(\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(S(\omega)\right)}\right)$$

Для обчислення **модуля** необхідно виділити в комплексному числі $\dot{S}(\omega)$ речову та уявну частину.

$$\dot{S}(\omega)=\frac{U}{\alpha+j\omega}$$

домножимо і розділимо на комплексно пов'язаний знаменник

$$\dot{S}(\omega)=\frac{U}{\alpha+j\omega}=\frac{U(\alpha-j\omega)}{(\alpha+j\omega)(\alpha-j\omega)}=\frac{U\alpha-jU\omega}{\left(\alpha^2+j\omega\alpha-j\omega\alpha-(j\omega)^2\right)}=\frac{U\alpha-jU\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}=$$

$$=\frac{U\alpha}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}-\frac{jU\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)},$$

звідси випливає, що речова частина спектральної щільності

$$\mathrm{Re}\left(S(\omega)\right)=\frac{U\alpha}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)},$$

$$\mathrm{Im}\left(S(\omega)\right)=-\frac{U\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}.$$

уявна частина

Модуль спектральної щільності

$$\left|S(\omega)\right|=\sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(S(\omega)\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(S(\omega)\right)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{U\alpha}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}\right)^2+\left(-\frac{U\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{U^2\alpha^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}+\frac{U^2\omega^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{U^2\left(\alpha^2+\omega^2\right)}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{U^2}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)}}=\frac{U}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}.$$

Таким чином, модуль комплексної спектральної щільності (амплітудний спектр)

$$\left|S(\omega)\right|=\frac{U}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}.$$

Це дуже громіздкий спосіб. Можна скористатися властивістю: якщо z_1 та z_2 комплексні числа, то $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ (у нашому окремому випадку $\left|\frac{1}{z_2}\right|=\frac{1}{|z_2|}$).

$$\dot{S}(\omega)=\frac{U}{\alpha+j\omega}\Rightarrow\left|S(\omega)\right|=\left|\frac{U}{\alpha+j\omega}\right|=\frac{|U|}{|\alpha+j\omega|}=\frac{U}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}.$$

Результати збіглися.

Знайдемо **аргумент комплексної спектральної щільності**, знаючи, що

$$\psi(\omega)=\mathrm{ar}\,ctg\left(\frac{\mathrm{Im}\left(S(\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(S(\omega)\right)}\right).$$

$$\psi(\omega)=\operatorname{ar}ctg\left(\frac{\operatorname{Im}(S(\omega))}{\operatorname{Re}(S(\omega))}\right)=\operatorname{ar}ctg\left(\frac{-\frac{U\omega}{(\alpha^2+\omega^2)}}{\frac{U\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)}}\right)=\operatorname{ar}ctg\left(-\frac{U\omega}{(\alpha^2+\omega^2)}\frac{(\alpha^2+\omega^2)}{U\alpha}\right)=$$

$$=\operatorname{ar}ctg\left(-\frac{U\omega}{U\alpha}\right)=-\operatorname{ar}ctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

Таким чином, аргумент комплексної спектральної густини (фазовий спектр)

$$\psi(\omega)=-\operatorname{ar}ctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Знову ж таки можна використовувати властивість комплексних чисел $\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$ (або в окремому випадку $\arg\frac{1}{z_2}=-\arg z_2$).

Тоді

$$\psi(\omega)=\arg(\frac{U}{\alpha+j\omega})=-\arg(\alpha+j\omega)=-\operatorname{ar}ctg2\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Але враховуючи, що за умовою $\alpha>0$, аргумент буде лежати або в 1-й або в 4-й чверті. Значить замість $\operatorname{ar}ctg2$ можемо записати просто $\operatorname{ar}ctg$. Тобто

$$\psi(\omega)=-\operatorname{ar}ctg\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Задача 3.

Знайти спектральну щільність одиночного косинусоїдального імпульсу (рис. 10)

$$s(t)=\begin{cases}0, t<t_1\\ A\cos\omega_0 t, t_1\le t\le t_2\\ 0, t>t_2\end{cases}.$$

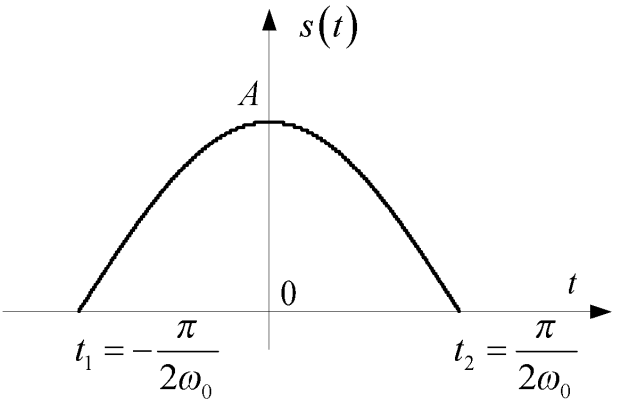


Рис. 10

Рішення:

Парна чи непарна задана функція?

Яке перетворення Фур'є застосовуємо для парної функції?

Застосуємо косинусне перетворення Фур'є

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=2\int_{0}^{+\infty}s(t)\cos\omega t dt$$

$$s(t)=\begin{cases}0, t<t_1\\ A\cos\omega_0 t, t_1\le t\le t_2\\ 0, t>t_2\end{cases}$$

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=2\int_{0}^{+\infty}s(t)\cos\omega t dt=2\int_{0}^{t_2}A\cos\omega_0 t\cos\omega t dt=$$

$$=\left|\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\right|=2\frac{A}{2}\int_{0}^{t_2}\left(\cos(\omega_0 t+\omega t)+\cos(\omega_0 t-\omega t)\right)dt=$$

$$=A\left[\int_{0}^{t_2}\cos(\omega_0+\omega)t dt+\int_{0}^{t_2}\cos(\omega_0-\omega)t dt\right]=A\left[\frac{1}{\omega_0+\omega}\sin(\omega_0+\omega)t\Big|_0^{t_2}+\frac{1}{\omega_0-\omega}\sin(\omega_0-\omega)t\Big|_0^{t_2}\right]=$$

$$=\left|t_2=\frac{\pi}{2\omega_0}\right|=A\left[\frac{1}{\omega_0+\omega}\sin(\omega_0+\omega)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}}+\frac{1}{\omega_0-\omega}\sin(\omega_0-\omega)t\Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\right]=$$

$$=A\left[\frac{1}{\omega_0+\omega}\left(\sin\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}-\sin 0\right)+\frac{1}{\omega_0-\omega}\left(\sin\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}-\sin 0\right)\right]=$$

$$=A\left(\frac{\sin\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}}{\omega_0+\omega}+\frac{\sin\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}}{\omega_0-\omega}\right).$$

Можна вирішувати це завдання іншим способом, використовуючи формулу Ейлера

$$s(t)=A\cos\omega_0 t=\frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right).$$

Тоді

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt+\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt=$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(\omega_0-\omega)t}dt+\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega_0+\omega)t}dt=\frac{A}{2}\left[\frac{1}{j(\omega_0-\omega)}e^{j(\omega_0-\omega)t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}}+\frac{1}{-j(\omega_0+\omega)}e^{-j(\omega_0+\omega)t}\Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}}\right]=$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{1}{j(\omega_0-\omega)}\left(e^{j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}\right) + \frac{1}{-j(\omega_0+\omega)}\left(e^{-j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}\right)\right] =$$

$$= \left|\begin{matrix} формулаЕйлера \\ \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \end{matrix}\right| = A\left[\frac{1}{(\omega_0-\omega)}\frac{e^{j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}}{2j} + \frac{1}{(\omega_0+\omega)}\frac{e^{j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}}{2j}\right] =$$

$$= A\left[\frac{\sin\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}}{(\omega_0-\omega)} + \frac{\sin\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}}{(\omega_0+\omega)}\right].$$

Результати рішення двома способами однакові.

Задача 4.

Сигнал $s(t)$ має модуль спектральної щільності $\left|S(\omega)\right|$ (рис. 11). Зобразіть графічно модуль спектральної щільності $\left|S_1(\omega)\right|$ сигналу $s_1(t) = s(t)\cos\omega_0 t$, причому виконуються умови: $\omega_0 = const$, $\omega_0 << \omega_1$, $\omega_0 > \frac{\Delta\omega}{2}$, тут $\Delta\omega$ – ширина частотної смуги сигналу.

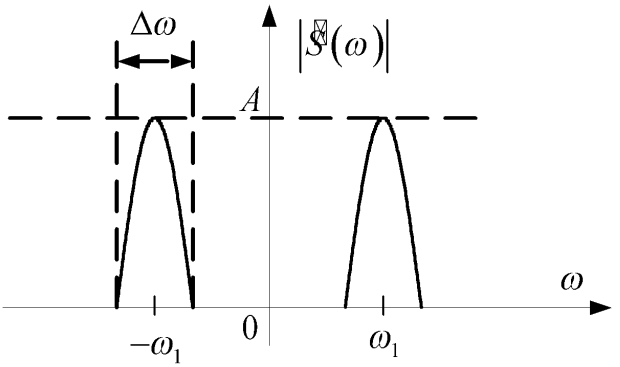


Рис. 11

Рішення:

Яку властивість перетворень Фур'є можемо використовувати?

Використовуємо властивість про зсув спектру сигналу: розщеплення спектру $\dot{S}(\omega)$ на дві частини, зміщені на $+\omega_0$ і $-\omega_0$, еквівалентно множенню функції $s(t)$ на гармонійне коливання $\cos\omega_0 t$ (при $\theta_0 = 0$).

У нас $s_1(t) = s(t)\cos\omega_0 t$, запишемо

$$\dot{S}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(\omega_0 t + \theta_0)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta_0}S(\omega-\omega_0) + e^{j\theta_0}S(\omega+\omega_0)\right]$$

.

Тут θ_0 – початкова фаза, у нас $\theta_0 = 0$, отримаємо:

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}\left[S(\omega-\omega_0)+S(\omega+\omega_0)\right].$$

Тобто початковий спектр, що складається із двох частин, розщепиться на 4 частини. В області позитивних частот була компонента при ω_1, а стане два компоненти: $(\omega_1+\omega_0)$ та $(\omega_1-\omega_0)$. В області негативних частот замість $(-\omega_1)$ стане $(-\omega_1)-\omega_0 = -(\omega_1+\omega_0)$ і $(-\omega_1)+\omega_0 = -(\omega_1-\omega_0)$. Амплітуда спектральних компонентів зменшиться вдвічі. Зобразимо спектр, який відповідає отриманим результатам (рис. 12).

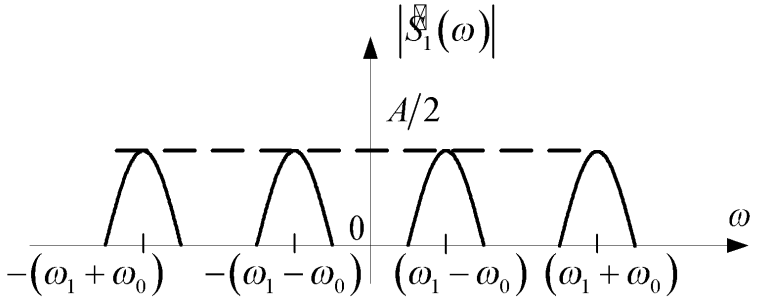


Рис. 12

Все правильно, хоч мені більше подобається трохи інша інтерпретація:

$$s_1(t) = s(t)\cos\omega_0 t = s(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right).$$

А при множенні на $e^{j\omega_0 t}$ Спектр (і модуль, і фаза, до речі) просто зміщується на ω_0 по осі частот праворуч, а при множенні на $e^{j(-\omega_0)t}$ - відповідно, вліво. Одна друга у знаменнику, зменшує їх удвічі за величиною.

Задача 5.

Задано сигнал $s(t) = 2\delta(t-3)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція.
Чому дорівнюватиме його спектральна щільність?
Рішення:
Яка основна властивість дельта-функції?

Запишемо ППФ:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-3)e^{-j\omega t}dt.$$

Згадаймо фільтруючу властивість дельта-функції. Якщо безперервну функцію помножити на дельта-функцію та їх добуток проінтегрувати за часом, то результат дорівнюватиме значенню безперервної функції в тій точці, де зосереджений дельта-імпульс

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$

Для нашого випадку запишемо так:

$$\dot{S}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3)e^{-j\omega t}dt = 2e^{-j3\omega}$$

.

Відповідь: $\dot{S}(\omega) = 2e^{-j3\omega}$

Задача 6.

Задано прямокутний імпульс $s(t)$ (рис. 13) з модулем спектральної щільності $|S(\omega)|$ (рис. 14).

Також заданий модуль спектральної щільності $|S_1(\omega)|$ (рис. 15), стиснутий вдвічі відносно $|S(\omega)|$.

Зобразити графічний сигнал $s_1(t)$, відповідний спектру $|S_1(\omega)|$.

Взагалі, одного амплітудного спектра недостатньо відновлення сигналу (адже є ще фазовий). Але якщо уточнити, що фазовий спектр дорівнює 0 (як у даному випадку), або згадати, що фазовий спектр стиснувся аналогічно амплітудному – тоді все правильно.

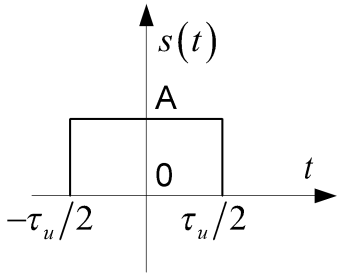


Рис. 13

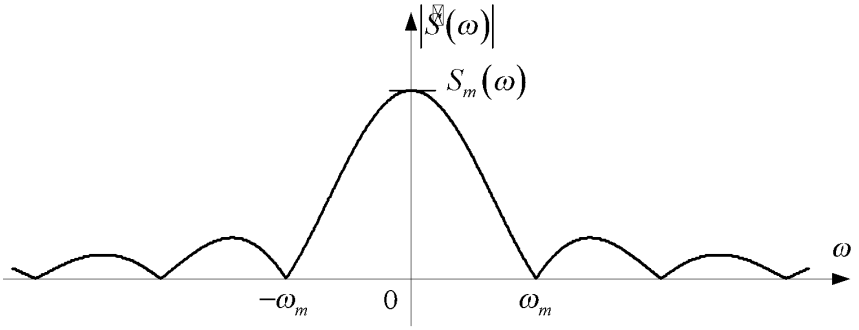


Рис 14

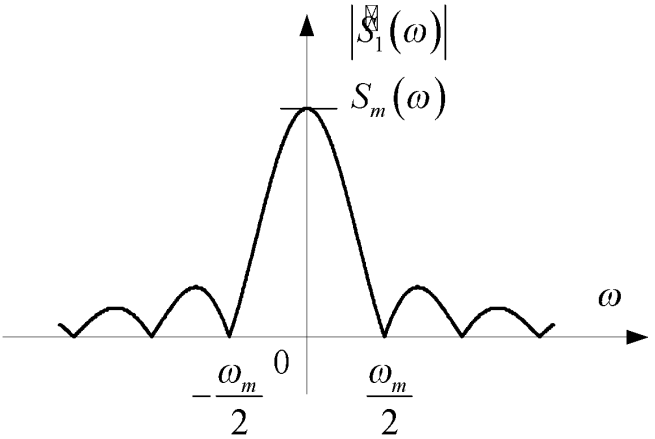


Рис. 15

Рішення:

Використовуємо властивість ПФ «Зміна масштабу часу»:

якщо сигналу $s(t)$ відповідає спектр $\dot{S}(\omega)$, то сигналу $s(kt) \Rightarrow \frac{1}{k}\dot{S}\left(\frac{\omega}{k}\right)$.

Тобто при розтягуванні сигналу по осі часу відбувається стиснення його спектру і збільшення амплітуди модуля спектральної щільності. У нас спектр стиснувся вдвічі, отже, в часовій області сигнал вдвічі розтягнеться, а амплітуда сигналу в часовій області має бути вдвічі менше (у нашому випадку $k = 2$). Таким чином, сигнал, що відповідає спектру $\left|S_1(\omega)\right|$, має вигляд (рис. 16).

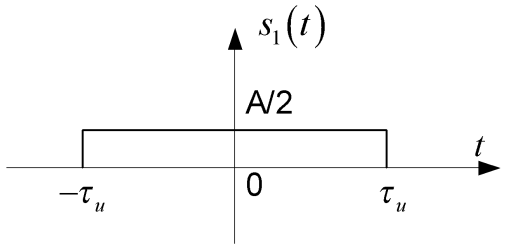


Рис. 16

Задача 7.

Сигнал $s(t)$ має спектральну щільність $\dot{S}(\omega)$. Чому дорівнюватиме спектральна щільність сигналу $s_1(t) = \dfrac{ds(t - t_0)}{dt}, t_0 -$ деяка константа.

Рішення:

Які властивості ПФ необхідно використовувати?

Використовуємо властивість ПФ про диференціювання та властивість про зсув у часі:

1) Якщо сигнал зсувається у часі на деяку константу $\pm t_0$, то його спектр по фазі змінюється на величину $\pm\omega t_0$, тобто з'являється додатковий множник $e^{\pm j\omega t_0}$.

2) Щоб знайти спектр сигналу $\dfrac{ds(t)}{dt}$ необхідно помножити спектр $\dot{S}(\omega)$ на $j\omega$.

Тобто для нашого випадку отримуємо $\dot{S}_1(\omega) = j\omega \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \dot{S}(\omega)$.

Відповідь: $\dot{S}_1(\omega) = j\omega \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \dot{S}(\omega)$