

Практичні заняття
за курсом «Сигнали та процеси»
осінній семестр, 2022-2023 навч. рік

Практичне заняття №3

Задача 1.

Задано прямокутний відеоімпульс (рис. 1). Знайти його спектр.

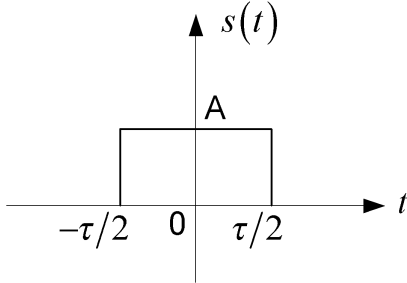


Рис. 1

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & -\frac{\tau}{2} > t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

Рішення:

Цей сигнал періодичний чи не періодичний?

Як знайти спектр (спектральну щільність) неперіодичного сигналу?

Спектральна щільність неперіодичного сигналу знаходиться шляхом обчислення **прямого перетворення Фур'є**

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt =$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \left| \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \right| = A \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}) = \left| \frac{\text{формула Ейлера}}{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}} = \sin \alpha \right| = \frac{2A}{\omega} \frac{(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2})}{2j} = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2} =$$

$$= \left| \frac{\text{функція Сінк}}{\sin \alpha} = \sin c \alpha \right| = A \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega/2} \cdot \frac{\tau}{\tau} = A\tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2}$$

$$S(\omega) = A\tau \sin c \frac{\omega\tau}{2}$$

Використаємо інший підхід до розв'язання задачі.
Задана функція є парною чи непарною?

Яке перетворення Фур'є можна використати для парної функції?

Знаючи, що наша функція парна, можна вирішувати за допомогою **косинусного перетворення Фур'є** (для парної функції в сумі для обчислення спектра залишається тільки доданок з косинусом, а інтеграл від парної функції за симетричними межами дорівнює подвоєному інтегралу в половинних межах):

$$S(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\tau/2} A \cos \omega t dt$$

Інтеграл від косинуса дорівнює...

$$S(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\tau/2} A \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\tau/2} = \frac{2A}{\omega} \left(\sin \frac{\omega\tau}{2} - \sin 0 \right) =$$

Синус нуля дорівнює...

$$= \frac{2A}{\omega} \left(\sin \frac{\omega\tau}{2} - 0 \right) = \frac{\tau}{\omega} \frac{A \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2}}{\tau/2} = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} = A\tau \sin c \frac{\omega\tau}{2}$$

Результати співпадають.

Зобразимо отриману функцію спектральної щільності прямокутного відеоімпульсу графічно

(рис. 2). Нулі функції будуть у точках, де $\sin \frac{\omega\tau}{2} = 0$.

При $\omega = 0$ отримуємо особливу точку з діленням на нуль

$$S(\omega) = S(0) = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega\tau/2} = A\tau \frac{\sin 0}{0} = A\tau \cdot 1 = A\tau$$

, у цій точці буде максимум функції.

У будь-якій іншій точці функція поводитиметься так:

$$S(\omega) = A\tau \sin c \frac{\omega\tau}{2} = S(0) \sin c \frac{\omega\tau}{2},$$

тобто як функція синк із нулями в точках:

$$\sin \frac{\omega\tau}{2} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{\omega\tau}{2} = n\pi \Rightarrow \omega\tau = 2n\pi \Rightarrow \omega = \frac{2n\pi}{\tau},$$

нулі отримаємо при $\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \frac{4\pi}{\tau}, \frac{6\pi}{\tau}, \dots$

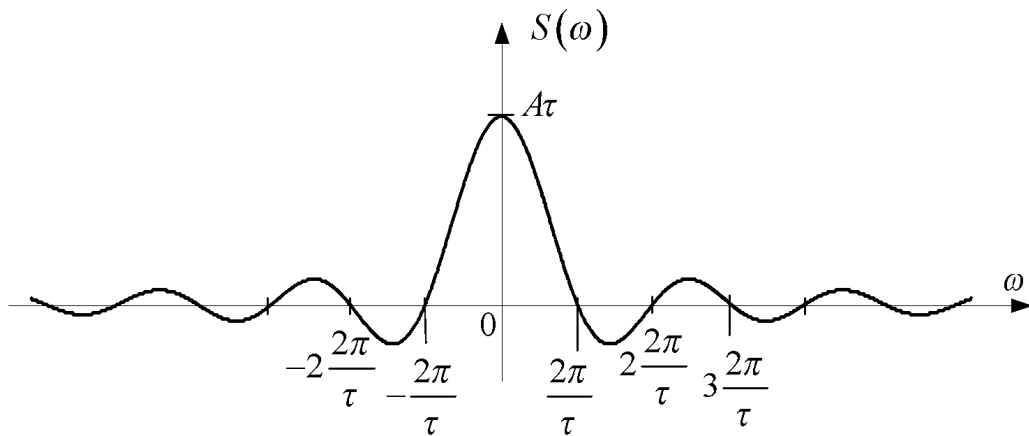


Рис. 2.

При збільшенні τ , тобто розтягуванні імпульсу, відстань між нулями $S(\omega)$ скорочується, тобто звужується спектр. При цьому $S(0)$ збільшується. При стисканні імпульсу у часі відбувається розширення його спектральної щільності, а $S(0)$ зменшується. При $\tau \rightarrow 0$ та

$A = \text{const}$ точки $\omega = \pm \frac{2\pi}{\tau}$ видаляються в нескінченність і спектральна щільність, нескінченно мала за величиною, стає рівномірною у смузі частот від $-\infty$ до $+\infty$. Замалюємо окремо АЧХ (рис. 3) та ФЧХ (рис. 4). У ФЧХ кожна зміна знаку $S(\omega)$ враховується зсувом на π .

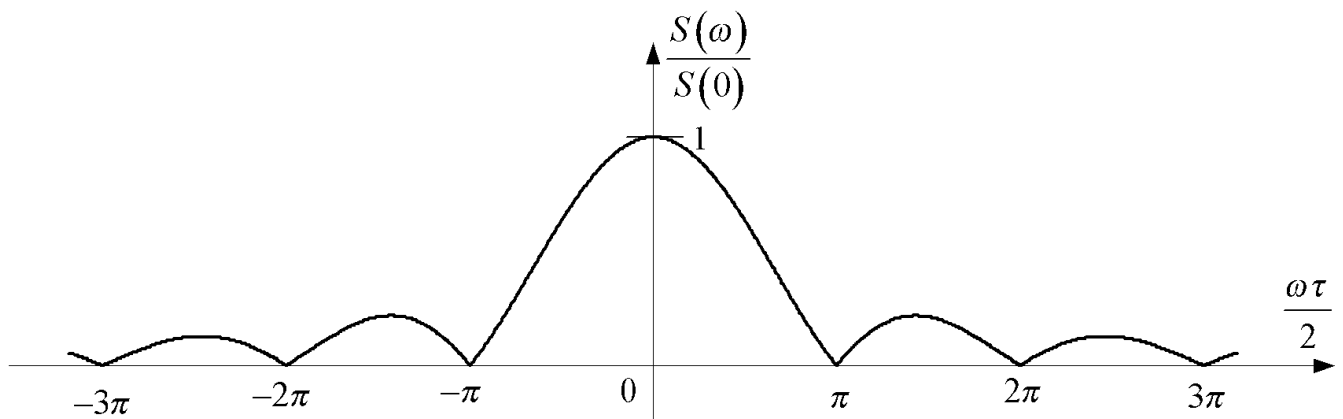


Рис. 3

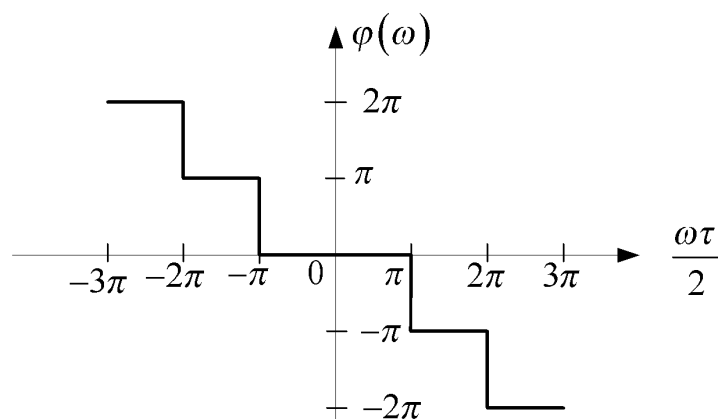


Рис. 4

Якщо початок початкового відеоімпульсу не в точці $t = \frac{\tau}{2}$, а в точці $t = 0$ (рис. 5), то відповідно до властивості ПФ про зсув у часі, у ФЧХ спектру з'явиться додатковий доданок, пов'язаний зі зрушенням імпульсу на $\frac{\tau}{2}$ у бік запізнення. АЧХ залишиться без змін.

Задача 2.

Знайти спектральну щільність експонентного відеоімпульсу (рис. 7)

$s(t) = U \exp(-\alpha t), \alpha > 0$, для $t < 0$ функція дорівнює 0.

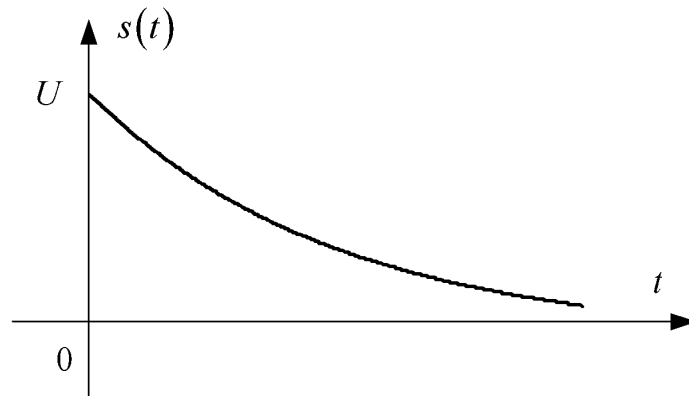


Рис. 7

Рішення:

Цей сигнал періодичний чи ні?

Цей сигнал описується парною функцією чи ні?

Спектральна щільність неперіодичного сигналу знаходиться шляхом обчислення прямого перетворення Фур'є

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} U e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} U e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = U \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} U e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = U \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = U \left. \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{U}{-(\alpha + j\omega)} (e^{-\infty} - e^0) = \left. \frac{U}{-(\alpha + j\omega)} \right|_{\substack{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}} = \frac{U}{-(\alpha + j\omega)} (0 - 1) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$

$$\dot{S}(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$

Графіки модуля спектральної щільності (АЧХ) та аргументу спектральної щільності (ФЧХ) показані на рис. 8, 9.

Ще нюанс, що ступінь експоненти комплексний $e^{-\infty(\alpha + j\omega)}$. На перший погляд не зовсім ясно, як це трактувати, адже ступінь комплексний. Можна розписати $e^{-\infty(\alpha + j\omega)} = e^{-\infty\alpha} e^{-j\infty\omega}$. Тепер видно, що це добуток, де перший дійсний множник, який у межі прагне до нуля. А другий – комплексна експонента, модуль якої за будь-якого аргументу дорівнює 1. У результаті приходимо до висновку, що $e^{-\infty(\alpha + j\omega)}$ – це комплексне число, модуль якого у межі прагне нулю. Замість нього підставляємо просто 0. Хоча можна на цьому не акцентувати увагу.

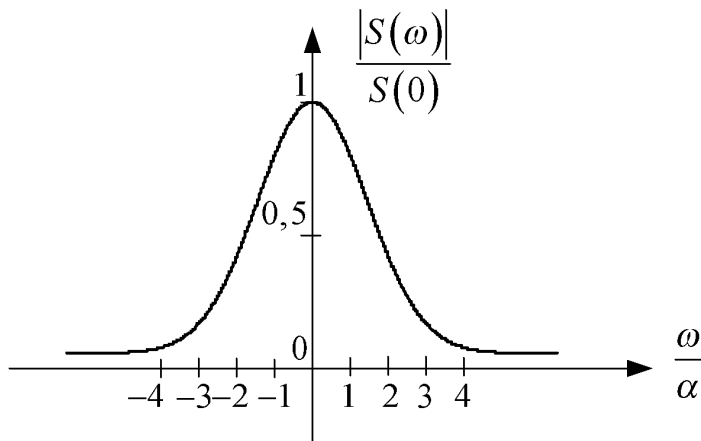


Рис. 8

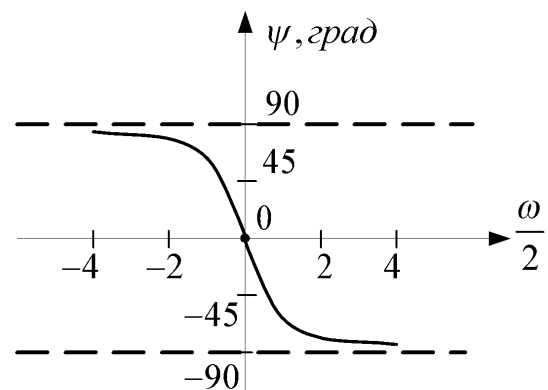


Рис. 9

Особливості спектральної щільності експоненційного коливання:

- 1) Модуль спектральної щільності $S(\omega)$ не звертається в нуль за жодного кінцевого значення частоти.
- 2) $\dot{S}(\omega)$ – комплексна величина $\dot{S}(\omega) = |S(\omega)| e^{j\psi(\omega)}$.

Що треба зробити з комплексною спектральною щільністю неперіодичного сигналу, щоб записати АЧХ та ФЧХ?

АЧХ це модуль спектральної щільності

$$|S(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(S(\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(S(\omega)))^2}$$

ФЧХ це аргумент спектральної щільності

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(S(\omega))}{\operatorname{Re}(S(\omega))} \right)$$

Для обчислення **модуля** необхідно виділити в комплексному числі $\dot{S}(\omega)$ речову та уявну частину.

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}$$

домножимо і розділимо на комплексно пов'язаний знаменник

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega} = \frac{U(\alpha - j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)} = \frac{U\alpha - jU\omega}{(\alpha^2 + j\omega\alpha - j\omega\alpha - (j\omega)^2)} = \frac{U\alpha - jU\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)} =$$

$$= \frac{U\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)} - \frac{jU\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)},$$

звідси випливає, що реальна частина спектральної щільності

$$\operatorname{Re}(S(\omega)) = \frac{U\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)},$$

$$\operatorname{Im}(S(\omega)) = -\frac{U\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

уявна частина

Модуль спектральної щільності

$$|S(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(S(\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(S(\omega)))^2} = \sqrt{\left(\frac{U\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}\right)^2 + \left(-\frac{U\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{U^2\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} + \frac{U^2\omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{U^2(\alpha^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{U^2}{(\alpha^2 + \omega^2)}} = \frac{U}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Таким чином, модуль комплексної спектральної щільності (амплітудний спектр)

$$|S(\omega)| = \frac{U}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Це дуже громіздкий спосіб. Можна скористатися властивістю: якщо z_1 та z_2 комплексні числа, то $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(у нашому окремому випадку $\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}$).

$$S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega} \Rightarrow |S(\omega)| = \left|\frac{U}{\alpha + j\omega}\right| = \frac{|U|}{|\alpha + j\omega|} = \frac{U}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Результати збіглися.

Знайдемо **аргумент комплексної спектральної щільності**, знаючи, що

$$\psi(\omega) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}(S(\omega))}{\operatorname{Re}(S(\omega))}\right).$$

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im}(S(\omega))}{\operatorname{Re}(S(\omega))} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\frac{U\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)}}{\frac{U\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)}} \right) = \operatorname{arctg} \left(-\frac{U\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)} \frac{(\alpha^2 + \omega^2)}{U\alpha} \right) =$$

$$= \operatorname{arctg} \left(-\frac{U\omega}{U\alpha} \right) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right)$$

Таким чином, аргумент комплексної спектральної густини (фазовий спектр)

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right).$$

Знову ж таки можна використовувати властивість комплексних чисел $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ (або в
 окремому випадку $\arg \frac{1}{z_2} = -\arg z_2$).

Тоді

$$\psi(\omega) = \arg \left(\frac{U}{\alpha + j\omega} \right) = -\arg(\alpha + j\omega) = -\operatorname{arctg} 2 \left(\frac{\omega}{\alpha} \right).$$

Але враховуючи, що за умовою $\alpha > 0$, аргумент буде лежати або в 1-й або в 4-й чверті. Значить замість $\operatorname{arctg} 2$ можемо записати просто arctg . Тобто

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right).$$

Задача 3.

Знайти спектральну щільність одиночного косинусоїдального імпульсу (рис. 10)

$$s(t) = \begin{cases} 0, t < t_1 \\ A \cos \omega_0 t, t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, t > t_2 \end{cases}.$$

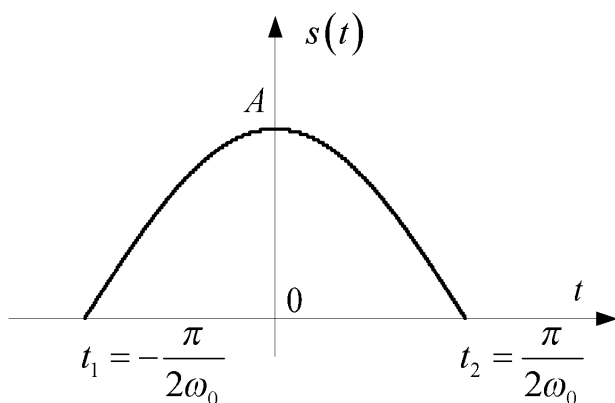


Рис. 10

Рішення:

Парна чи непарна задана функція?

Яке перетворення Фур'є застосовуємо для парної функції?

Застосуємо косинусне перетворення Фур'є

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt$$

$$s(t) = \begin{cases} 0, t < t_1 \\ A \cos \omega_0 t, t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, t > t_2 \end{cases}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{+\infty} s(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{t_2} A \cos \omega_0 t \cos \omega t dt =$$

$$\begin{aligned} &= \left| \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \right| = 2 \frac{A}{2} \int_0^{t_2} (\cos(\omega_0 t + \omega t) + \cos(\omega_0 t - \omega t)) dt = \\ &= A \left[\int_0^{t_2} \cos(\omega_0 + \omega) t dt + \int_0^{t_2} \cos(\omega_0 - \omega) t dt \right] = A \left[\frac{1}{\omega_0 + \omega} \sin(\omega_0 + \omega) t \Big|_0^{t_2} + \frac{1}{\omega_0 - \omega} \sin(\omega_0 - \omega) t \Big|_0^{t_2} \right] = \\ &= \left| t_2 = \frac{\pi}{2\omega_0} \right| = A \left[\frac{1}{\omega_0 + \omega} \sin(\omega_0 + \omega) t \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{1}{\omega_0 - \omega} \sin(\omega_0 - \omega) t \Big|_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right] = \\ &= A \left[\frac{1}{\omega_0 + \omega} \left(\sin \frac{(\omega_0 + \omega)\pi}{2\omega_0} - \sin 0 \right) + \frac{1}{\omega_0 - \omega} \left(\sin \frac{(\omega_0 - \omega)\pi}{2\omega_0} - \sin 0 \right) \right] = \\ &= A \left(\frac{\sin \frac{(\omega_0 + \omega)\pi}{2\omega_0}}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)\pi}{2\omega_0}}{\omega_0 - \omega} \right) \end{aligned}$$

Можна вирішувати це завдання іншим способом, використовуючи формулу Ейлера

$$s(t) = A \cos \omega_0 t = \frac{A}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Тоді

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt = \frac{A}{2} \left[\frac{1}{j(\omega_0 - \omega)} e^{j(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} + \frac{1}{-j(\omega_0 + \omega)} e^{-j(\omega_0 + \omega)t} \Big|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{2} \left[\frac{1}{j(\omega_0 - \omega)} \left(e^{j(\omega_0 - \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0 - \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} \right) + \frac{1}{-j(\omega_0 + \omega)} \left(e^{-j(\omega_0 + \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{j(\omega_0 + \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} \right) \right] = \\
&= \left| \frac{\text{формула Ейлера}}{\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}} \right| = A \left[\frac{1}{(\omega_0 - \omega)} \frac{e^{j(\omega_0 - \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0 - \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}}}{2j} + \frac{1}{(\omega_0 + \omega)} \frac{e^{j(\omega_0 + \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0 + \omega) \frac{\pi}{2\omega_0}}}{2j} \right] = \\
&= A \left[\frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega) \pi}{2\omega_0}}{(\omega_0 - \omega)} + \frac{\sin \frac{(\omega_0 + \omega) \pi}{2\omega_0}}{(\omega_0 + \omega)} \right].
\end{aligned}$$

Результати рішення двома способами однакові.

Задача 4.

Сигнал $s(t)$ має модуль спектральної щільності $|S(\omega)|$ (рис. 11). Зобразіть графічно модуль спектральної щільності $|S_1(\omega)|$ сигналу $s_1(t) = s(t) \cos \omega_0 t$, причому виконуються умови: $\omega_0 = \text{const}$, $\omega_0 \ll \omega_1$, $\omega_0 > \frac{\Delta\omega}{2}$, тут $\Delta\omega$ – ширина частотної смуги сигналу.

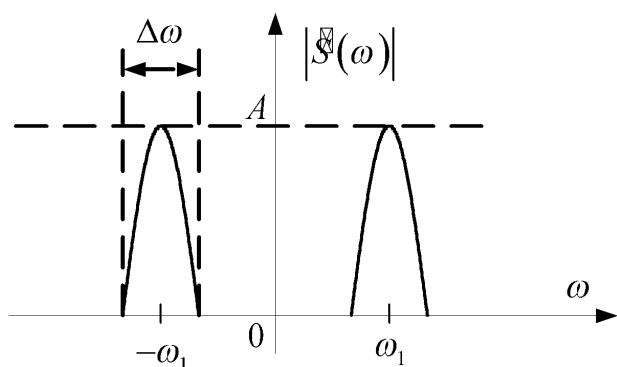


Рис. 11

Рішення:

Яку властивість перетворень Фур'є можемо використовувати?

Використовуємо властивість про зсув спектру сигналу: розщеплення спектру $S(\omega)$ на дві частини, зміщені на $+\omega_0$ і $-\omega_0$, еквівалентно множенню функції $s(t)$ на гармонійне коливання $\cos \omega_0 t$ (при $\theta_0 = 0$).

У нас $s_1(t) = s(t) \cos \omega_0 t$, запишемо

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \left[e^{j\theta_0} S(\omega - \omega_0) + e^{j\theta_0} S(\omega + \omega_0) \right].$$

Тут θ_0 – початкова фаза, у нас $\theta_0 = 0$, отримаємо:

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} [S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)]$$

Тобто початковий спектр, що складається із двох частин, розщепиться на 4 частини. В області позитивних частот була компонента при ω_1 , а стане два компоненти: $(\omega_1 + \omega_0)$ та $(\omega_1 - \omega_0)$. В області негативних частот замість $(-\omega_1)$ стане $(-\omega_1) - \omega_0 = -(\omega_1 + \omega_0)$ і $(-\omega_1) + \omega_0 = -(\omega_1 - \omega_0)$. Амплітуда спектральних компонентів зменшиться вдвічі. Зобразимо спектр, який відповідає отриманим результатам (рис. 12).

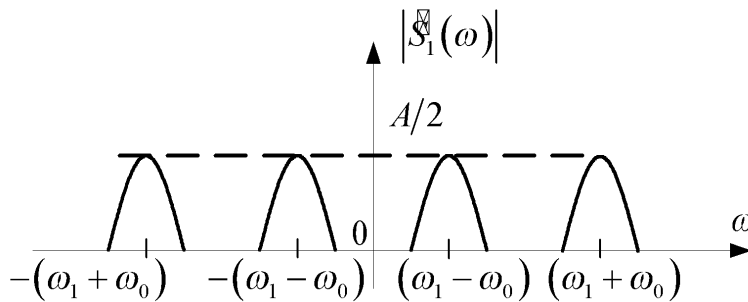


Рис. 12

Все правильно, хоч мені більше подобається трохи інша інтерпретація:

$$s_1(t) = s(t) \cos \omega_0 t = s(t) \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right)$$

А при множенні на $e^{j\omega_0 t}$ Спектр (і модуль, і фаза, до речі) просто зміщується на ω_0 по осі частот праворуч, а при множенні на $e^{j(-\omega_0)t}$ - відповідно, вліво. Одна друга у знаменнику, зменшує їх удвічі за величиною.

Задача 5.

Задано сигнал $s(t) = 2\delta(t-3)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція.

Чому дорівнюватиме його спектральна щільність?

Рішення:

Яка основна властивість дельта-функції?

Запишемо ППФ:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt$$

Згадаймо фільтруючу властивість дельта-функції. Якщо безперервну функцію помножити на дельта-функцію та їх добуток проінтегрувати за часом, то результат дорівнюватиме значенню безперервної функції в тій точці, де зосереджений дельта-імпульс

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

Для нашого випадку запишемо так:

$$S(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt = 2e^{-j3\omega}$$

Відповідь: $S(\omega) = 2e^{-j3\omega}$

Задача 6.

Задано прямокутний імпульс $s(t)$ (рис. 13) з модулем спектральної щільності $|S(\omega)|$ (рис. 14).

Також заданий модуль спектральної щільності $|S_1(\omega)|$ (рис. 15), стиснутий вдвічі відносно $|S(\omega)|$.

Зобразити графічний сигнал $s_1(t)$, відповідний спектру $|S_1(\omega)|$.

Взагалі, одного амплітудного спектра недостатньо відновлення сигналу (адже є ще фазовий). Але якщо уточнити, що фазовий спектр дорівнює 0 (як у даному випадку), або згадати, що фазовий спектр стиснувся аналогічно амплітудному – тоді все правильно.

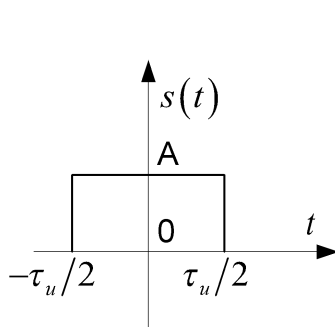


Рис. 13

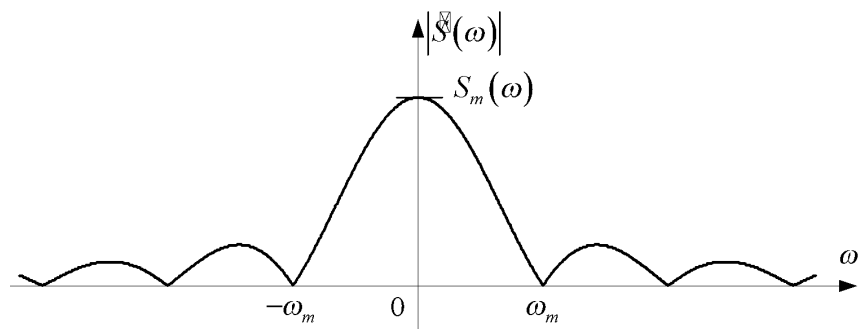


Рис 14

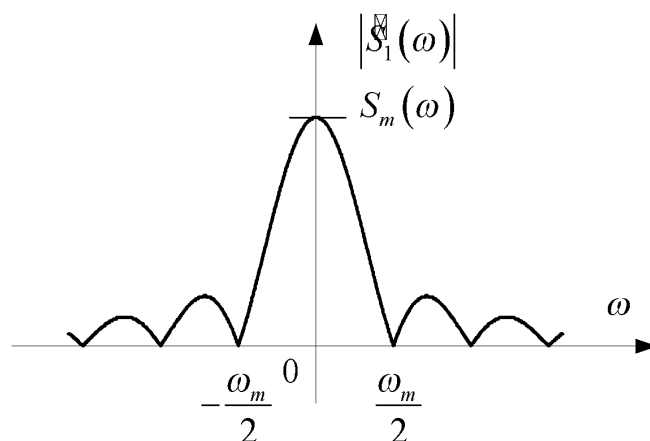


Рис. 15

Рішення:

Використовуємо властивість ПФ «Зміна масштабу часу»:

якщо сигналу $s(t)$ відповідає спектр $S(\omega)$, то сигналу $s(kt) \Rightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right)$.

Тобто при розтягуванні сигналу по осі часу відбувається стиснення його спектру і збільшення амплітуди модуля спектральної щільності. У нас спектр стиснувся вдвічі, отже, в часовій області сигнал вдвічі розтягнеться, а амплітуда сигналу в часовій області має бути вдвічі менше (у нашому випадку $k = 2$). Таким чином, сигнал, що відповідає спектру $|S_1(\omega)|$, має вигляд (рис. 16).

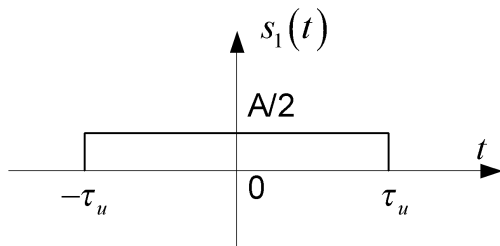


Рис. 16

Задача 7.

Сигнал $s(t)$ має спектральну щільність $\dot{S}(\omega)$. Чому дорівнюватиме спектральна щільність

сигналу $s_1(t) = \frac{ds(t-t_0)}{dt}, t_0 =$ деяка константа.

Рішення:

Які властивості ПФ необхідно використовувати?

Використовуємо властивість ПФ про диференціювання та властивість про зсув у часі:

1) Якщо сигнал зсувається у часі на деяку константу $\pm t_0$, то його спектр по фазі змінюється на величину $\pm \omega t_0$, тобто з'являється додатковий множник $e^{\pm j\omega t_0}$.

2) Щоб знайти спектр сигналу $\frac{ds(t)}{dt}$ необхідно помножити спектр $\dot{S}(\omega)$ на $j\omega$.

Тобто для нашого випадку отримуємо $\dot{S}_1(\omega) = j\omega \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \dot{S}(\omega)$.

Відповідь: $\dot{S}_1(\omega) = j\omega \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \dot{S}(\omega)$