

Теоретичні відомості

Розглянемо як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$.

1. Побудова графіка функції $y = f(|x|)$.

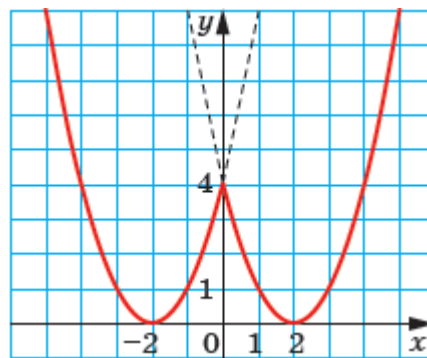
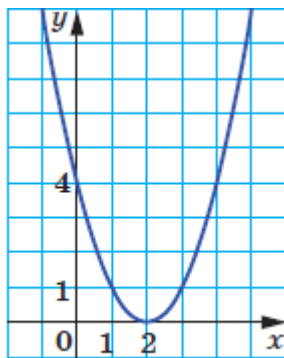
Скориставшись означенням модуля, можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geq 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ – з графіком функції $y = f(-x)$.

Звідси слідує **алгоритм побудови графіка функції $y = f(|x|)$** :

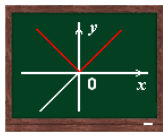
- 1) Частину графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться правіше осі Oy або на ній – залишити без змін.
- 2) І цю ж саму частину графіка **симетрично відобразити відносно осі Oy** .



2. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ f(-x), & f(x) < 0. \end{cases}$$



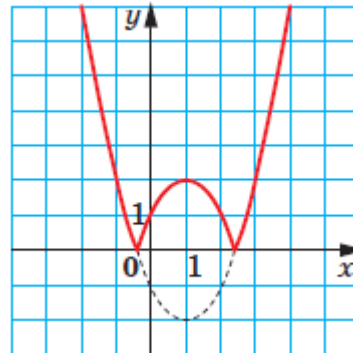
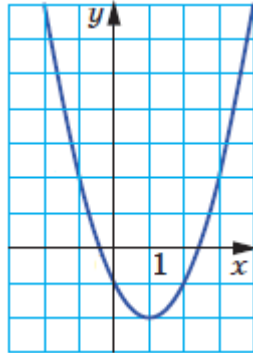
Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



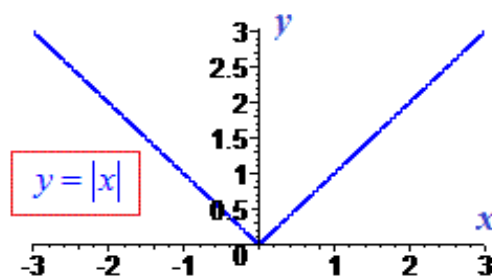
Звідси робимо висновок: графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x , для яких $f(x) \geq 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x , для яких $f(x) < 0$, – з графіком функції $y = -f(x)$.

Звідси слідує **алгоритм побудови графіка функції $y = |f(x)|$:**

- 1) Частину графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться вище осі Ox або на ній – залишити без змін.
- 2) А частину графіка нижче осі Ox симетрично відобразити відносно осі Ox .

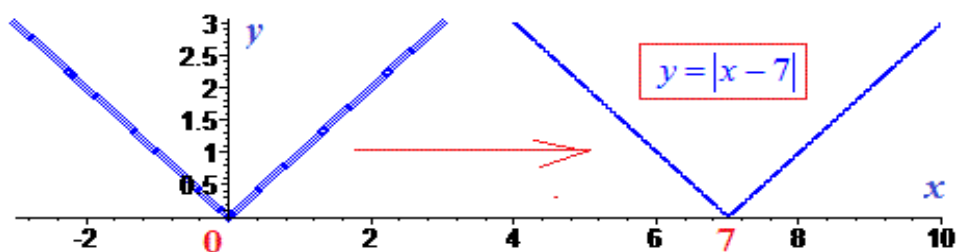


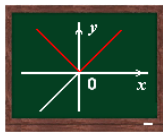
Нагадаємо, що графік функції $y = |x|$ має вигляд:



3. Найпростіші перетворення графіків функцій.

Якщо змістити графік функції $y = |x - 7|$ вздовж осі Ox вправо, наприклад, на 7 одиниць, то отримаємо графік функції $y = |x - 7|$.

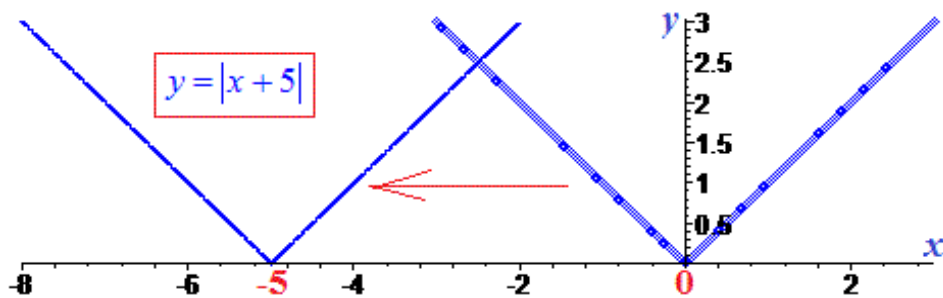




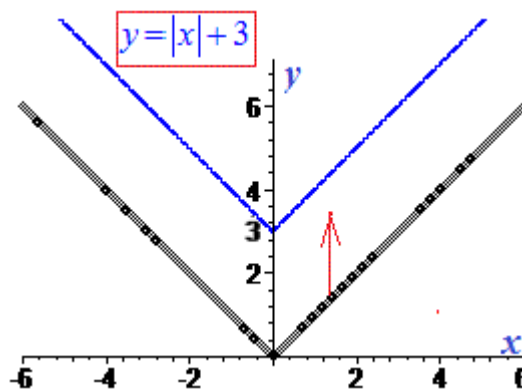
Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



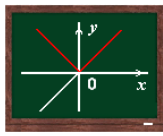
Якщо перемістити графік функції $y = |x + 5|$ вліво вздовж осі Ox на 5 одиниць, то отримаємо графік функції $y = |x + 5|$.



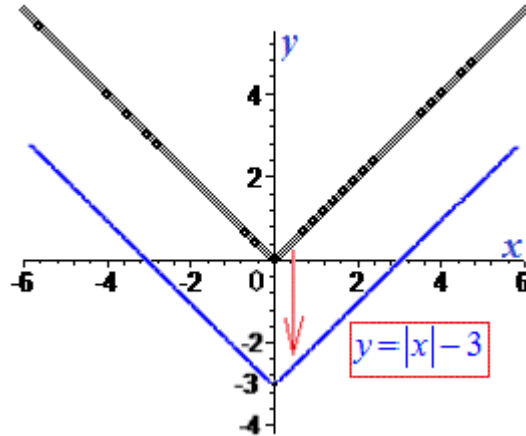
Якщо перемістити графік функції $y = |x|$ вгору вздовж осі Oy на 3 одиниці, то отримаємо графік функції $y = |x| + 3$.



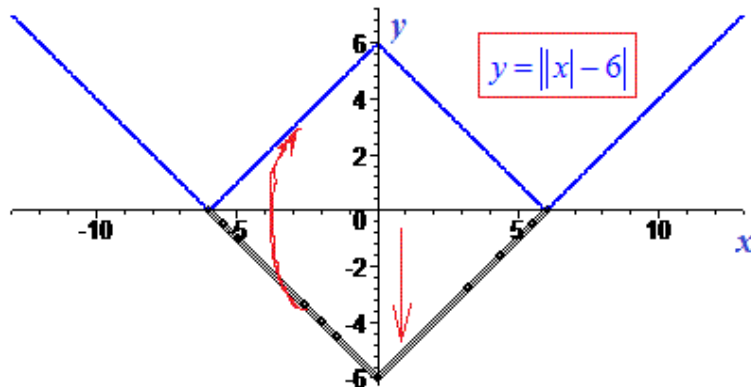
Якщо перемістити графік функції $y = |x|$ вздовж осі Oy на 3 одиниці вниз, то отримаємо графік функції $y = |x| - 3$.



Побудова графіків функцій, що містять знак модуля

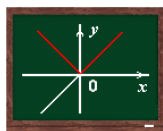


Якщо ж ми маємо рівняння виду модуль в модулі, то перетворення відбуваються наступним чином. Наприклад, розглянемо функцію $y = ||x| - 6|$. Спочатку виконаємо перенесення графіка внутрішнього модуля вздовж осі Oy вниз на 6 одиниць, а потім частину графіка, що знаходиться нижче осі Ox симетрично відобразимо відносно осі Ox .



Отже, маємо підсумкову таблицю деяких елементарних перетворень графіків функцій:

Елементарні перетворення графіка функції $y = f(x)$			
№ з/п	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	$y = -f(x)$		Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox



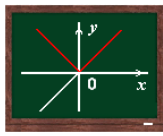
Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



2	$y = f(-x)$		Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Oy
3	$y = f(x) + b$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі Oy на: - b одиниць вгору, якщо $b > 0$, - b одиниць вниз, якщо $b < 0$.
4	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі Ox на: - a одиниць вправо, якщо $a > 0$, - a одиниць вліво, якщо $a < 0$.
5	$y = f(x) $		Частина графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться вище осі Ox або на ній – залишити без змін, а частину графіка нижче осі Ox симетрично відобразити відносно осі Ox
6	$y = f(x)$		Частина графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться правіше осі Oy або на ній – залишити без змін, і цю ж саму частину графіка симетрично відобразити відносно осі Oy
7	$ y = f(x)$		Частина графіка функції $y = f(x)$, що знаходиться вище осі Ox або на ній – залишити без змін, і цю ж саму частину графіка симетрично відобразити відносно осі Ox

Приклади задач з розв'язанням

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = |x| + x$.



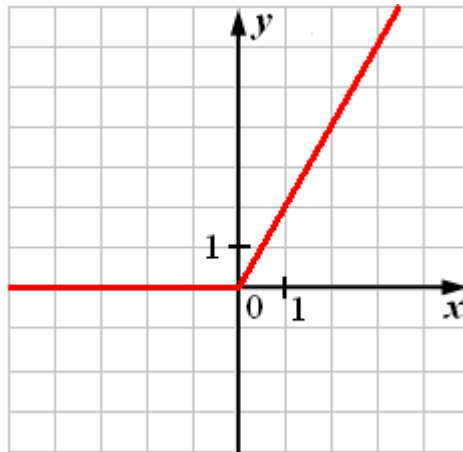
Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



Розв'язання.

Якщо $x \geq 0$, то маємо $y = x + x$; тобто $y = 2x$.

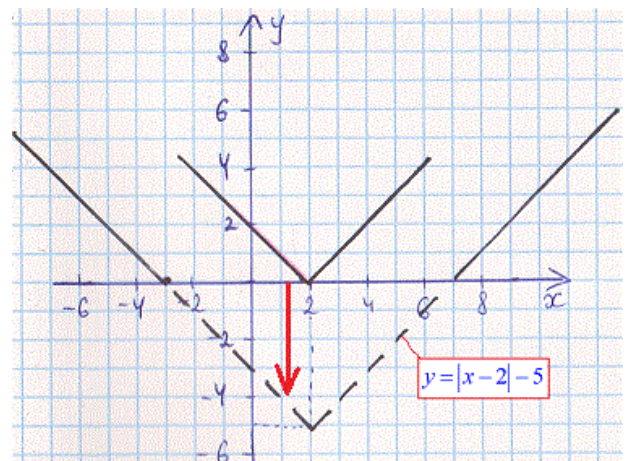
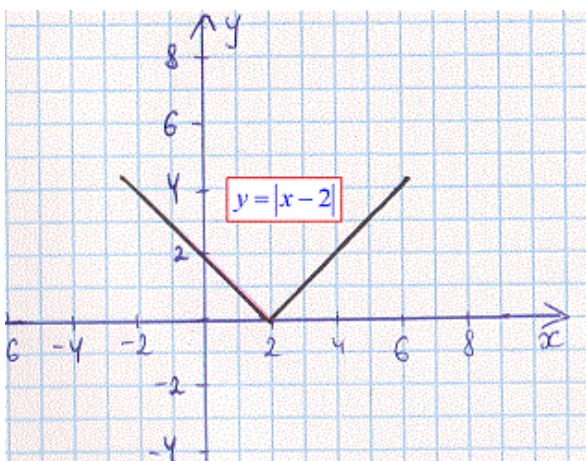
Якщо $x < 0$, то маємо $y = x - x$; тобто $y = 0$. Отже, маємо графік функції:



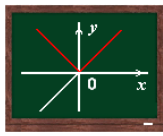
Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = ||x - 2| - 5|$.

Розв'язання.

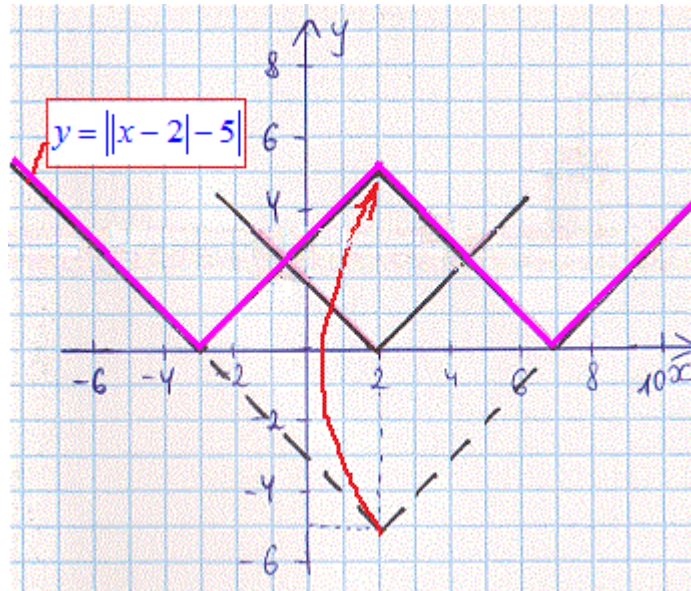
Побудуємо спочатку графік функції $y = |x - 2|$. Потім паралельно перенесемо графік на 5 одиниць вниз вздовж осі Oy .



Частина графіка, що знаходиться над віссю Ox і на ній – лишаємо без змін, частину ж графіка, що знаходиться під віссю Ox – симетрично відображаємо відносно осі Ox .



Побудова графіків функцій, що містять знак модуля

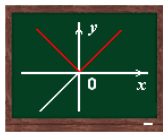


Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = |||x + 1| - 3| - 5|$.

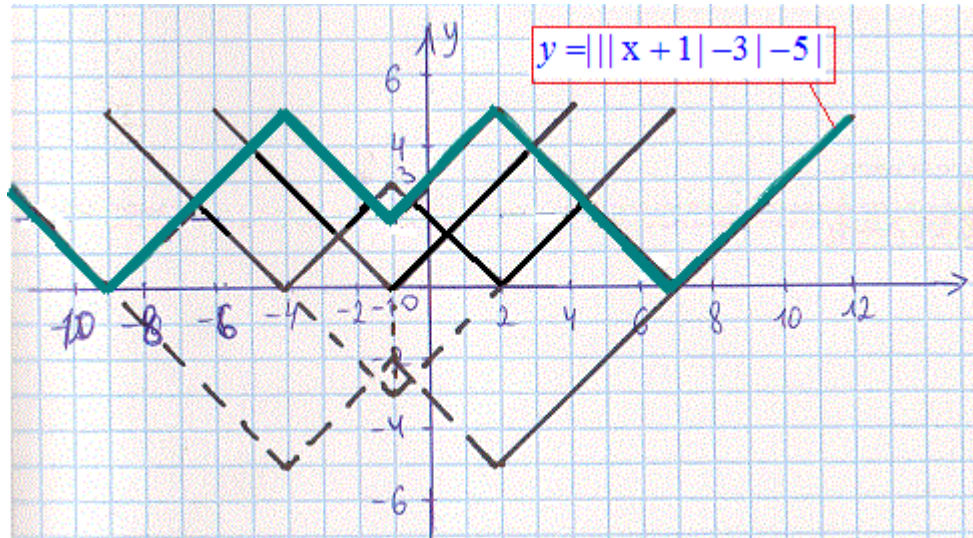
Розв'язання.

Графік даної функції можна отримати з графіка функції $y = |x|$, здійснивши наступні перетворення:

- 1) перенести графік функції $y = |x|$ на 1 одиницю вліво вздовж осі Ox ;
- 2) отриманий графік, паралельно перенести на 3 одиниці вниз;
- 3) частину графіка над віссю Ox , разом з точками на осі, – залишити без змін, частину графіка під віссю Ox – симетрично відобразити відносно осі Ox .
- 4) Отриманий графік знову паралельно перенести вздовж осі Oy на 5 одиниць вниз;
- 5) і знову застосувати симетричне відображення частини графіка, що знаходиться під віссю Ox відносно цієї осі, а частину графіка, що знаходиться вище осі – залишити без змін.



Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



$$y = \frac{x^2 - 1}{|x| - 1}.$$

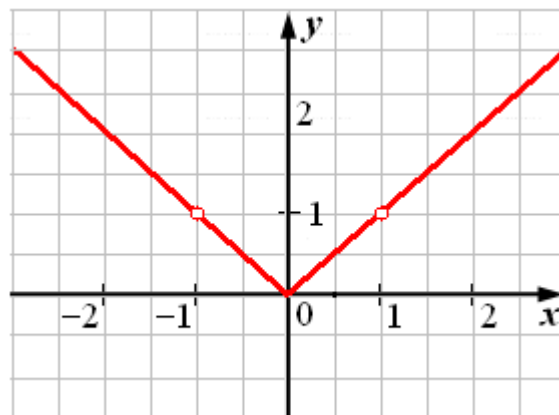
Приклад 4. Побудуйте графік функції

Розв'язання.

Область визначення функції – всі числа, крім чисел 1 і -1. Здійснимо перетворення виразу, використовуючи формулу скороченого множення та основну властивість дробу:

$$\frac{x^2 - 1}{|x| - 1} = \frac{|x|^2 - 1}{|x| - 1} = \frac{(|x| - 1)(|x| + 1)}{|x| - 1} = |x| + 1.$$

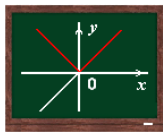
Отже, маємо формулу функції $y = |x| + 1$, при $x \neq \pm 1$. Графік функції має вигляд:



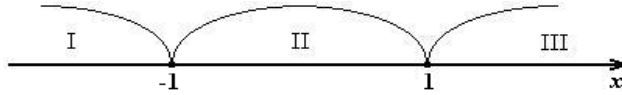
Приклад 5. Побудуйте графік функції $y = |x - 1| + |x + 1|$.

Розв'язання.

Знайдемо нулі модулів: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$. Нулі модулів розбивають числову пряму на проміжки. Розглянемо дану функцію на кожному з цих проміжків:



Побудова графіків функцій, що містять знак модуля

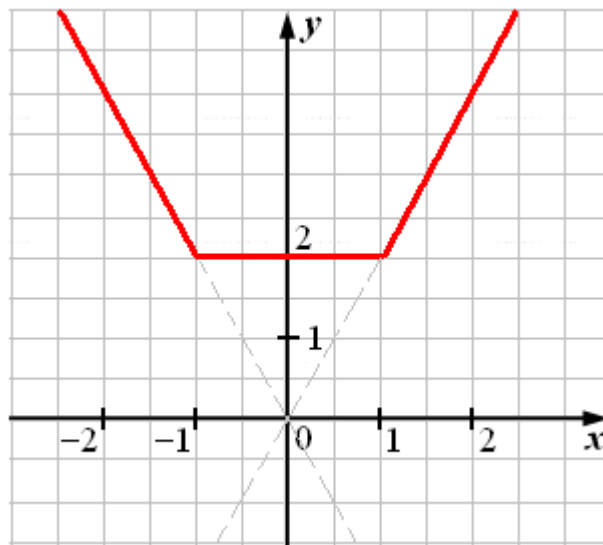


I. Якщо $x \in (-\infty; -1)$, то маємо формулу функції $y = -x + 1 - x - 1$; $y = -2x$.

II. Якщо $x \in [-1; 1)$, то маємо формулу функції $y = -x + 1 + x + 1$; $y = 2$.

III. Якщо $x \in [1; +\infty)$, то маємо формулу функції $y = x - 1 + x + 1$; $y = 2x$.

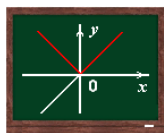
Отже, маємо графік функції:



Задачі до даної теми

- 1¹. Побудувати графік функції: $y = |x - 7|$.
- 2¹. Побудувати графік функції: $y = |x| + 4$.
- 3². Побудувати графік функції: $y = |2x - 5|$.
- 4². Побудувати графік функції: $y = ||x - 3| - 4|$.
- 5². Побудувати графік функції: $y = ||x + 2| - 5| - 3$.
- 6³. Побудувати графік функції: $y = |||x + 3| - 2| + 2|$.
- 7³. Побудувати графік функції: $y = |||x - 3| - 4| - 7|$.
- 8⁴. Побудувати графік функції: $y = |x + 3| + |2x + 1| - x$.
- 9⁴. Побудувати графік функції: $y = \frac{|x - |x||}{x}$.

Список рекомендованої літератури



Побудова графіків функцій, що містять знак модуля



до підготовки з даної теми:

1. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 7 класів загальноосвітніх навчальних закладів. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Харків: Гімназія, 2015. – 256 с.
2. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра: Підручник для 8 класів з поглибленим вивченням математики. / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Харків: Гімназія, 2008. – 368 с.
3. Мерзляк А.Г. та ін. Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів та абітурієнтів / Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. – Київ: А.С.К., 1997. – 320 с.: 115 іл.
4. http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_1/57.htm
5. <http://yukhym.com/uk/matematika/rivnyannya-z-modulyami-grafichnij-metod.html>