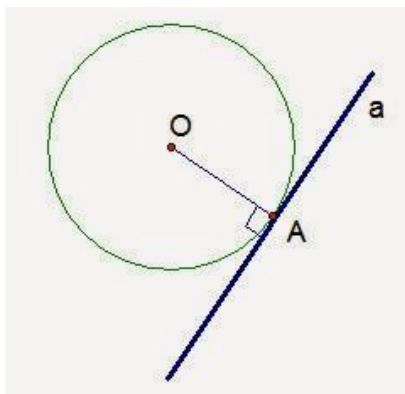


26. Окружность. Круг. Вписанные и описанные многоугольники

МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

КАСАТЕЛЬНАЯ, ХОРДА, СЕКУЩАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Касательная

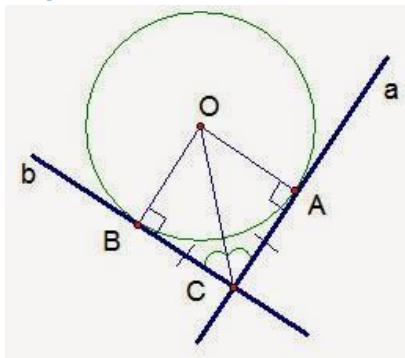


Касательная имеет с окружностью только одну общую точку.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

a - касательная,
A - точка касания,
OA - радиус окружности,
 $a \perp OA$

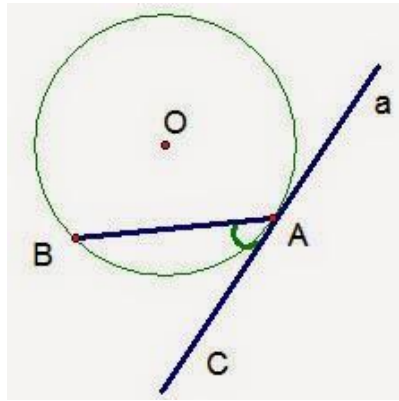
Отрезки касательных



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

a, b - касательные,
 $BC = CA$,
 $\angle BCO = \angle OCA$

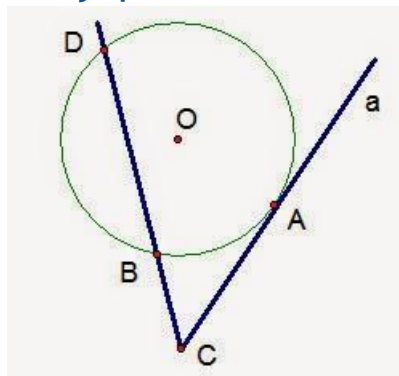
Угол между касательной и хордой



Градусная мера угла, сторонами которого служат касательная и хорда, равна половине градусной меры дуги, расположенной внутри этого угла.

а - касательная,
 А - точка касания,
 ВА - хорда,
 $\angle BAC =$ половине градусной меры дуги АВ.

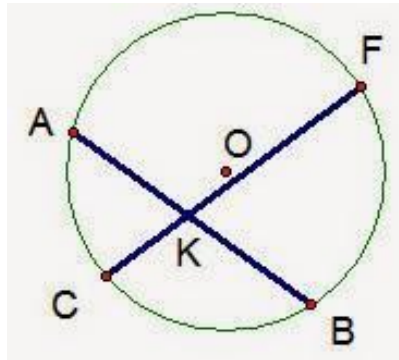
Свойство касательной и секущей



Если через точку, лежащую вне круга провести касательную и секущую, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и ее внешней части.

а - касательная,
 А - точка касания,
 CD - секущая,
 $CA^2 = CB \cdot CD$.

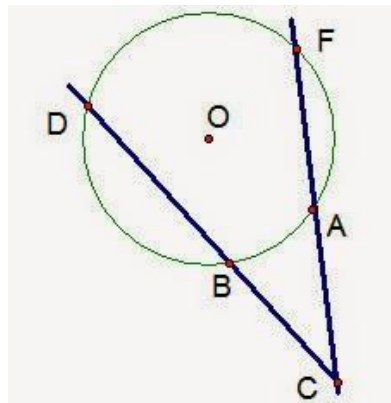
Свойство хорд



Если хорды пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.

CF, AB - хорды,
 $CK \cdot KF = AK \cdot KB$

Свойство секущих



Если через точку, лежащую вне круга провести две секущие, то произведение длин секущей и ее внешней части одной секущей равно произведению длин секущей и ее внешней части другой секущей.

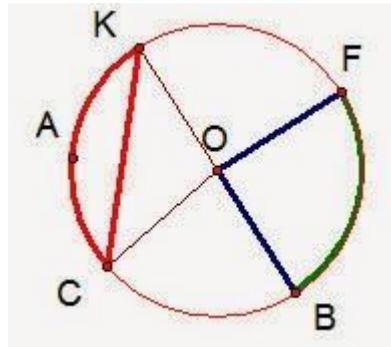
CD, CF - секущие,
 $CD \cdot CB = CF \cdot CA$.

Длина окружности. Длина дуги

Длина вычисляется по формуле: $C = 2\pi R$.

Длина дуги вычисляется по формуле: $l = C \cdot \alpha : 360$ или $l = \pi R \alpha : 180$. α - градусная мера дуги.

Площадь круга. Площадь сектора. Площадь сегмента



OFB - сектор

KCA - сегмент

Площадь круга вычисляется по формуле: $S=\pi R^2$.

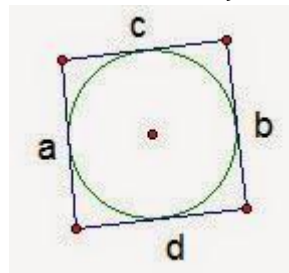
Площадь сектора вычисляется по формуле: $S=\pi R^2 \cdot \alpha : 360$.

Площадь сегмента находят как разность площадей сектора и треугольника: $S=S \text{ сектора } KOC - S \text{ треугольника } KOC$.

Описанные многоугольники

В любой треугольник можно вписать единственную окружность. Центр окружности - точка пересечения биссектрис треугольника.

Если в прямоугольный треугольник вписать окружность, то радиус можно найти по формуле: $r=(a+b-c):2$, где a, b - катеты, c - гипотенуза треугольника.



Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противоположных сторон равны.

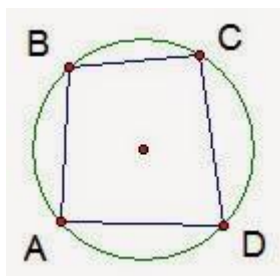
$$a+b=c+d$$

Площадь описанного многоугольника: $S=p \cdot r$, где p - полупериметр многоугольника, r - радиус окружности.

Вписанные многоугольники

Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Радиус описанной окружности можно найти по формуле: $2R=a : \sin \alpha$, где a - сторона треугольника и α - противолежащий ей угол.

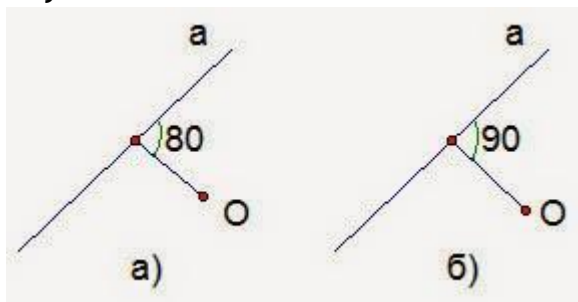
В прямоугольном треугольнике $R=c:2$, где c - гипотенуза.



Если около четырехугольника описана окружность, то суммы градусных мер противоположных углов равны 180° .
 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Сколько общих точек имеют прямая a и окружность с центром в точке O и радиусом, равным отрезку OA ?



Решение:

а) две

Решение: 2.

2. а) К окружности из точки A проведены две касательные. B и C - точки касания. Радиус окружности равен 3 см, $AB=5$ см. Найдите AC .

б) К окружности из точки C проведены две касательные. B и A - точки касания. Радиус окружности равен 5 см, $CB=4$ см. Найдите AC .

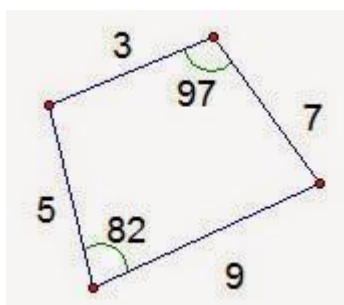
Решение:

а) AC и BC - касательные, проведенные из одной точки к окружности, а отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки равны, следовательно $AB=AC=5$ см.

Ответ: 5 см.

3. а) Можно ли около четырехугольника описать окружность?

б) Можно ли в четырехугольник вписать окружность?



Решение:

а) Если около четырехугольника описана окружность, то суммы градусных мер противоположных углов равны 180° , но $82^\circ + 97^\circ = 179^\circ$, что не равно 180° .

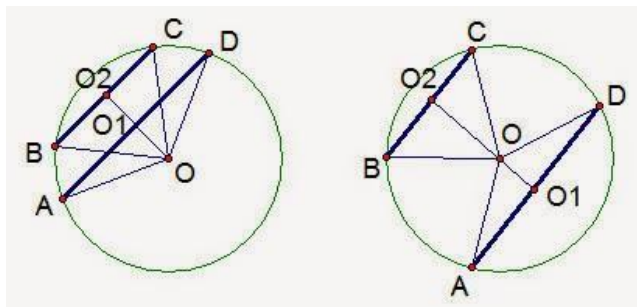
Ответ: нельзя.

4. В окружности радиусом R хорды AD и BC параллельны. Найдите расстояние между хордами, если:

а) $R=5$ см, $AD=8$ см, $BC=6$ см. б) $R=10$ см, $AD=16$ см, $BC=12$ см.

Решение:

а) Возможны два случая: хорды лежат по одну сторону от центра окружности и по разные. Рассмотрим оба.



OO_2 - расстояние между хордами.

1) Рассмотрим треугольник BOC - равнобедренный ($OB=OC=R$), следовательно OO_2 является высотой и медианой и $CO_2=BO_2=BC:2=3$ см. По теореме Пифагора найдем OO_2 : $OO_2^2 = OC^2 - CO_2^2 = 25 - 9 = 16$, $OO_2 = 4$ см.

2) Рассмотрим треугольник AOD - равнобедренный ($OD=OA=R$), следовательно OO_1 является высотой и медианой и $AO_1=DO_1=AD:2=4$ см. По теореме Пифагора найдем OO_1 : $OO_1^2 = OA^2 - AO_1^2 = 25 - 16 = 9$, $OO_1 = 3$ см.

3) В случае, когда хорды лежат по одну сторону от центра $O_1O_2 = 4 - 3 = 1$ см.

В случае, когда хорды лежат по разные стороны от центра, то $O_1O_2 = 4 + 3 = 7$ см.

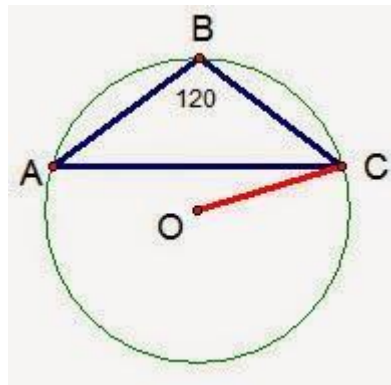
Ответ: 1 см или 7 см.

5. а) В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 120° , боковая сторона равна 6 см. Найдите радиус описанной окружности.

б) В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, угол при основании равен 75° . Найдите радиус описанной окружности.

Решение:

а)



Дано: ABC - равнобедренный треугольник; $AB=6$ см;

$\angle$

$ABC=120^\circ$; $w(O, OC)$ - описана около ΔABC .

Найти: R -?

1) Найдем углы при основании равнобедренного треугольника:

$\angle A = \angle C = (180 - 120) : 2 = 30^\circ$. 2) Найдем радиус описанной окружности:

$R = AB : \sin \angle A = 6 : \sin 30^\circ = 6 : 0,5 = 12$ см.

Ответ 12 см.

6. Радиус окружности равен 6 см.

а) Найдите длину дуги, которая содержит 120° .

б) Найдите площадь сектора, если его центральный угол равен 150° .

Решение:

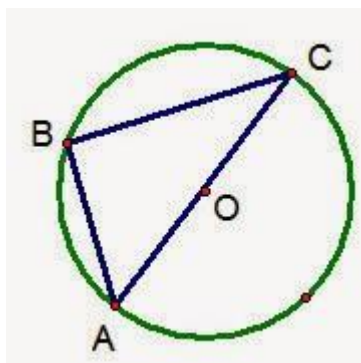
а) $l = \pi R \cdot \alpha : 180 = \pi \cdot 6 \cdot 120 : 180 = 4\pi$ см.

Ответ: 4π см

7. а) Одна из сторон вписанного треугольника лежит на диаметре. Радиус описанной окружности равен 10 см. Одна из сторон треугольника равна 16 см. Найдите площадь треугольника.

б) Одна из сторон вписанного треугольника лежит на диаметре. Радиус описанной окружности равен 25 см. Одна из сторон треугольника равна 14 см. Найдите площадь треугольника.

Решение:



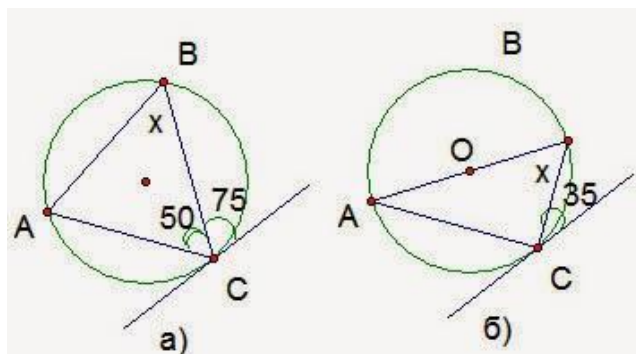
а) Дано: ΔABC ; $w(O, R)$ - описана около ΔABC ;

$R=10$ см; $BC=16$ см.

Найти S треугольника ABC .

- 1) Если сторона вписанного треугольника лежит на диаметре, то этот треугольник прямоугольный. $AC=2R=20$ см.
 2) По теореме Пифагора найдем AB : $AB^2=AC^2-BC^2=400-256=144$, $AB=12$ см.
 3) Найдем площадь треугольника: $S=AB*BC : 2=12*16:2=96$ см².
 Ответ: 96 см².

8. Найдите угол x :



Решение:

а) 1) Найдем длину дуги AB :

$\angle ACB$ - вписанный в окружность и он равен половине дуги AB , следовательно дуга AB равна $50^\circ * 2 = 100^\circ$.

2) Угол между хордой CB и касательной, проходящей через точку C равен половине дуги, которая находится внутри угла, тогда дуга BC равна $75^\circ * 2 = 150^\circ$.

3) Найдем дугу CA :

дуга $CA = 360^\circ - \text{дуга } AB - \text{дуга } BC = 360^\circ - 100^\circ - 150^\circ = 110^\circ$.

4) $\angle ABC$ - вписанный в окружность и равен половине дуги CA , т.е. $\angle ABC = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.

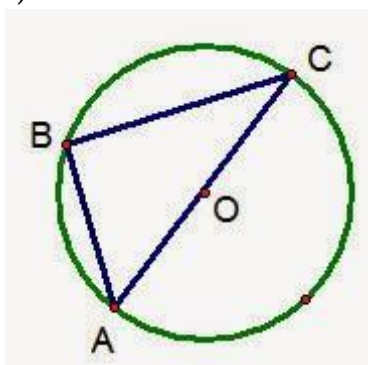
Ответ: 55° .

9. а) Радиус описанной около треугольника окружности равен 10 см. Две стороны треугольника равны 12 см и 20 см. Найдите площадь треугольника.

б) Радиус описанной около треугольника окружности равен 18,5 см. Две стороны треугольника равны 37 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

Решение:

а)



1) Так как одна из сторон треугольника (20 см) в два раза больше радиуса (10 см) описанной окружности, то она лежит на диаметре и треугольник является прямоугольным.

2) $AC = 20$ см; $AB = 12$ см. Найдем по теореме Пифагора BC : $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 400 - 144 = 256$, $BC = 16$ см.

3) Найдем площадь треугольника: $S = AB*BC : 2 = 12*16:2 = 96$ см².

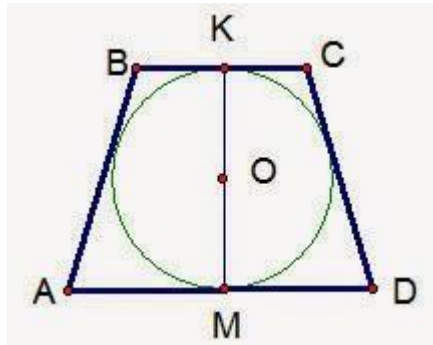
Ответ: 96 см².

10. а) Окружность радиуса 5 см вписана в равнобедренную трапецию с боковой стороной 16 см. Найдите площадь трапеции.

б) Окружность вписана в равнобедренную трапецию с боковой стороной 8 см и площадью 48 см^2 . Найдите радиус окружности.

Решение:

а)



Дано: $ABCD$ - равнобедренная трапеция;

$AB=CD=16 \text{ см}$; $w(O,R)$ - описана около трапеции; $R=5 \text{ см}$.

Найти S трапеции $ABCD$.

1) Т.к. в трапецию вписана окружность, то $AD+DC=AB+CD=6+6=12 \text{ см}$ - сумма оснований трапеции.

2) Высота равна двум радиусам вписанной окружности: $KM=2R=10 \text{ см}$.

3) Найдём площадь трапеции:

$$S=(AD+DC)*KM:2=12*10:2=60 \text{ см}^2$$

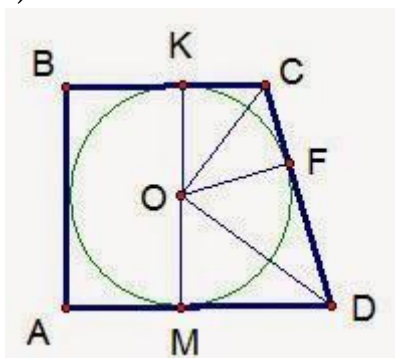
Ответ: 60 см^2

11. а) Найдите площадь прямоугольной трапеции, если точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию делит большую боковую сторону на отрезки 4 см и 9 см.

б) Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию, точкой касания делит большую боковую сторону на отрезки 4 см и 16 см. Найдите площадь трапеции.

Решение:

а)



Дано: $ABCD$ -прямоугольная трапеция;

$CF= 4 \text{ см}$; $FD=9 \text{ см}$.

Найти: S трапеции $ABCD$ - ?

1) Рассмотрим треугольники OKC и OFC , они равны по третьему признаку равенства треугольников:

$OK=OF$ как радиусы;

$CF=CK$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки;

OC - общая сторона.

Тогда $\angle KCO=\angle FCO$ и CO - биссектриса $\angle KCF$.

2) Рассмотрим треугольники OMD и OFD , они равны по третьему признаку равенства треугольников:

$OM=OF$ как радиусы;

$DM=DF$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки;

OD - общая сторона.

Тогда $\angle MDO=\angle FDO$ и DO - биссектриса $\angle MDF$.

3) Сумма углов трапеции равна 360° , т.к. $\angle A=\angle B=90^\circ$, то $\angle C + \angle D=360^\circ - 180^\circ=180^\circ$.

$\angle OCF + \angle ODF = (\angle C + \angle D):2=180^\circ:2=90^\circ$. Тогда в треугольнике OCD $\angle COD=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

4) Треугольник OCD - прямоугольный. $OF^2=CF*FD=4*9=36$. $OF=6$ см - радиус вписанной окружности.

$AB=2r=12$ см.

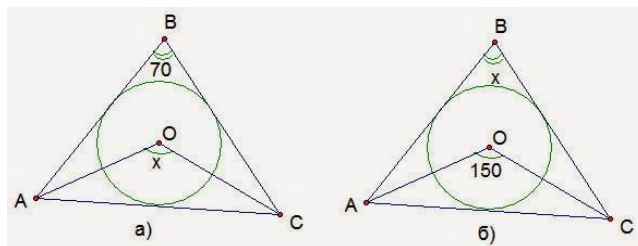
5) Т.к. трапеция описана около окружности, то $AD+DC=AB+CD=12+(4+9)=25$ см - сумма оснований трапеции.

6) Найдём площадь трапеции:

$S=(AD+DC)*KM:2=25*12:2=150$ см².

Ответ: 150 см².

12. Найдите угол x :



Решение:

а)

1) Найдём сумму углов A и C :

$\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

2) Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис треугольника, тогда $\angle OAC = \angle BAC:2$ и $\angle OCA = \angle BCA:2$.

Сумма углов OAC и OCA равна половине суммы углов A и C и равна 55° .

3) Найдём угол x :

Сумма углов треугольника AOC равна 180° , тогда $\angle x = 180^\circ - (\angle OAC + \angle OCA) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$.

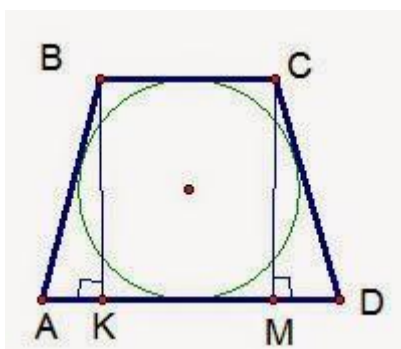
Ответ: 125° .

13. а) Доказать, что если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, то квадрат высоты трапеции равен произведению ее оснований.

б) Доказать, что если в прямоугольную трапецию можно вписать окружность, то площадь трапеции равна произведению оснований.

Решение:

а)



Дано: $ABCD$ - равнобедренная трапеция;
окружность вписана в трапецию.

Доказать: $BK^2 = BC \cdot AD$.

Доказательство:

1) Обозначим основание BC - a , основание AD - b . $BC = KM$ и $AK = (AD - DC) : 2 = (b - a) : 2$.

2) Т.к. в трапецию вписана окружность, то $AB + CD = DC + AD = a + b$, а т.к. трапеция равнобедренная, то $AB = (a + b) : 2$.

3) Найдем высоту BK трапеции:

треугольника ABK - прямоугольный и по теореме Пифагора $BK^2 = AB^2 - AK^2$

$$BK^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + 2ab - a^2}{4} = \frac{4ab}{4} = ab.$$

Следовательно, $BK^2 = BC \cdot AD$. Что и требовалось доказать.

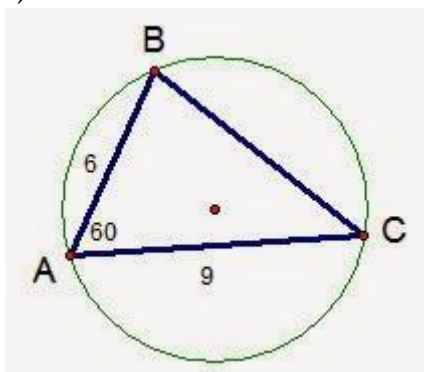
14. а) Стороны треугольника равны 9 см и 6 см, угол между ними равен 60° . Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника.

б) Сторона треугольника равна 9 см, угол, прилежащий к ней равен 60° .

Площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника равна 39π см². Найдите вторую сторону, которая прилежит к заданному углу. (№ 5.5.47 [7])

Решение:

а)



Дано: ABC - треугольник;
 $AB = 6$ см; $AC = 9$ см; $\angle BAC = 60^\circ$.

Найти: S круга, ограниченного описанной окружностью.

1) Найдем сторону BC :

по теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 0,5 = 63$.

$$BC = 3\sqrt{7} \text{ см}$$

2) Найдем площадь треугольника ABC :

$$S = (AB \cdot AC \cdot \sin \angle A) : 2 = (6 \cdot 9 \cdot \sin 60^\circ) : 2,$$

$$S = 13,5\sqrt{3} \text{ см}^2$$

3) Найдем радиус описанной окружности:

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{6 \cdot 9 \cdot 3\sqrt{7}}{4 \cdot 13,5\sqrt{3}} = \sqrt{21} \text{ см}$$

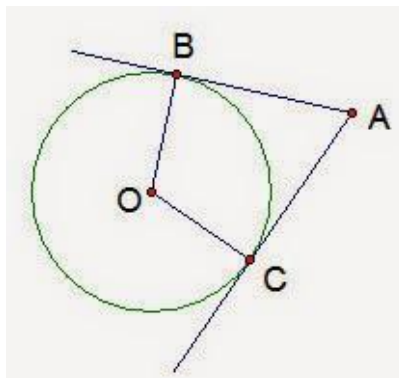
4) Найдем площадь круга:

$$S = \pi R^2 = 21\pi \text{ см}^2.$$

Ответ: $21\pi \text{ см}^2$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Заданы две окружности с радиусами R_1 и R_2 . Расстояние между радиусами d . Как расположены окружности, если:
а) $R_1=5 \text{ см}$; $R_2=3 \text{ см}$; $d=7 \text{ см}$; б) $R_1=5 \text{ см}$; $R_2=3 \text{ см}$; $d=8 \text{ см}$; в) $R_1=5 \text{ см}$; $R_2=3 \text{ см}$; $d=6 \text{ см}$;
г) $R_1=5 \text{ см}$; $R_2=3 \text{ см}$; $d=2 \text{ см}$?
2. Чему равен радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 18 см, 24 см, 30 см?
3. Можно ли в четырехугольник с последующими сторонами 6 см, 12 см, 18 см, 12 см вписать окружность?
4. В окружности радиуса 5 см проведена хорда длиной 8 см. Найти расстояние от центра окружности до хорды.
5. В угол A вписана окружность с центром в точке O , B и C - точки касания. Угол BOC равен 120° . Найдите угол BAO .
6. Найдите угол BAC , если $\angle BOC - \angle BAC = 50^\circ$.



7. В прямоугольную трапецию с основаниями 4 и 9 см вписана окружность. Найдите площадь трапеции.
8. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен 2 см. Найдите площадь треугольника, если гипотенуза равна 10 см.
9. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью вписанной в ромб, если периметр ромба равен 200 см и одна диагональ больше другой в 0,75 раза.
10. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 10 см и 6 см. Центр описанной окружности лежит на большем основании.