

En 1927, le diplomate Roumain Matila Ghyka publie *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*, dans lequel il introduit le nombre d'or comme marqueur universel de la beauté. Il s'appuie sur les travaux de philosophes allemands du XIXe siècle comme Gustav Fechner et son rectangle d'or, ou Adolf Zeising et sa section d'or. Eux même se sont appuyés sur les recherches du mathématicien de la Renaissance Luca Pacioli et de sa divine proportion, qui lui, s'est fortement inspiré des travaux d'Euclide et de son partage en moyenne et extrême raison. Bref, l'histoire du nombre d'or est tumultueuse et, ça tombe bien, j'ai deux minutes pour en parler.

J'ai ouvert cette chaîne il y a 8 ans, et il y a ce sujet que j'ai à peine évoqué et qui semble chez certains au cœur des mathématiques, le nombre d'or. Pour ceux qui ne le connaissent pas, le nombre d'or, c'est un nombre qui est partout, et qui est ni plus ni moins que de la clé pour appréhender la beauté du monde qui nous entoure. Pour comprendre de quoi il s'agit, prenons l'exemple incontournable : le Parthénon. Il s'agit du splendide temple grec qui surplombe l'Acropole, construit au Ve siècle avant notre ère. Sa beauté s'explique mathématiquement, et c'est une grande découverte de l'histoire de l'art. On peut en effet inscrire la façade du monument dans un rectangle, mais pas n'importe lequel, puisqu'il est 1.618 fois plus long que haut. On dit que ce rectangle est le rectangle d'or, et que son format est de 1.618.

Ce nombre, 1.618, c'est le fameux nombre d'or, la perfection faite nombre. On le note avec la lettre grecque phi, initiale de Phidias, sculpteur de la monumentale statue d'Athéna qui se trouvait au Parthénon, et dont il a dirigé les travaux.

Des rectangles aux proportions d'or peuvent alors être retrouvés dans tous les classiques de la peinture : par exemple, le visage de la Joconde s'inscrit exactement dans ce rectangle, le cadre de la naissance de Vénus de Botticelli est un rectangle d'or parfait et la grande vague de Kanagawa forme une spirale d'or, une spirale contenue dans des rectangles d'or imbriqués. On pourrait multiplier les exemples avec tous les plus beaux tableaux de l'histoire de la peinture. Et ça ne se limite pas à la peinture. On retrouve le nombre d'or en architecture, avec le Parthénon ou la grande Pyramide de Kheops, mais on peut aussi évoquer la cité Radieuse à Marseille. On le retrouve en graphisme, dans le logo d'Apple par exemple, ou de façon encore plus évidente dans celui de National Geographic. Bref, le nombre d'or est partout.

Pour comprendre ce lien entre le nombre d'or et la beauté, il y a un dessin incontournable, réalisé par Léonard de Vinci, l'homme de Vitruve. Il illustre les proportions parfaites d'un corps humain, et on y retrouve bien entendu 1.618, en divisant le côté du carré par le rayon du cercle. Cela permet de comprendre certaines prescriptions de beauté, comme celle proposée par la mathématicienne Lily Serna qui permet de déterminer la longueur parfaite pour une jupe. Dans le même esprit, on peut aussi calculer le degré de perfection d'un visage en le comparant avec un masque parfait, construit à partir du nombre d'or. Les plus hauts scores de perfection sont atteints par les plus importantes top-models de la planète. Allez, deux petits derniers exemples pour la route, qui permettent de comprendre en quoi la spirale d'or est indubitablement à l'origine de tout ce qui est parfait. Voici par exemple de parfaits petits chats dont l'enroulement suit une spirale d'or, ou bien cette coiffure en tout point parfaite...

Euh... Non, attendez, ça c'est clairement n'importe quoi. Ou alors, c'est tous ces exemples depuis le début qui sont n'importe quoi ? Est-ce que tout ça, c'est bien sérieux ? Reprenons, j'ai été beaucoup trop affirmatif dans cette introduction.

La façade du Parthénon rentrerait parfaitement dans un rectangle d'or. Oui, à condition de prendre dans le cadre quelques marches. Ce n'est pas aussi parfait qu'on aimerait le croire. Même chose avec la Grande Vague. La superposition des spirales est plutôt approximative. L'exemple de l'homme de Vitruve est lui plutôt fallacieux, puisque quand on divise le côté du carré par le rayon du cercle, on est plus proche de 1.64 que de 1.618. Cette différence n'est pas négligeable. Ensuite, si je cherche des rectangles d'un format précis dans une peinture, pour peu que ce que j'étudie ait un minimum de complexité, je vais finir par le trouver. On peut trouver des rectangles d'or dans le visage de la Joconde, mais je peux aussi sans difficulté y trouver de rectangle du format d'une feuille A4. Enfin, il y a d'énormes biais de sélection. La naissance de Vénus a un cadre proche des dimensions du nombre d'or, mais c'est plutôt rare dans l'œuvre de Botticelli. On a donc volontairement occulté le reste de son œuvre pour valider notre thèse. Même chose avec la grande Pyramide de Kheops. Les ratios dans cette pyramide qui sont proches du nombre d'or ne le sont pas du tout sur les autres pyramides. Malgré tout, tout n'est pas complètement faux non plus. Le logo de National Geographic, par exemple, suffit de le mesurer pour constater que c'est bien un rectangle d'or quasi parfait, à 0.5% près.

Il ne m'a pas fallu faire beaucoup de recherche pour trouver tous ces exemples d'œuvres d'art parfaite parce que liées au nombre d'or. Je me suis contenté de lire le premier livre venu et de regarder quelques vidéos sur le sujet. Les exemples que l'on y retrouve sont toujours un peu les mêmes, Léonard de Vinci, les sculpteurs grecs, Le Corbusier, etc. Et pour comprendre pourquoi ce sont toujours un peu les mêmes exemples d'artistes qui reviennent, il me semble judicieux de retracer l'histoire du nombre d'or.

La dénomination nombre d'or apparaît pour la première fois en 1927, dans le livre *L'Esthétique des proportions*, du diplomate roumain Matila Ghyka. Dans cet ouvrage, ainsi que dans le suivant "*Le nombre d'or*" préfacé par l'académicien Paul Valéry, Ghyka va définir le nombre d'or comme étant le nombre $(1 + \sqrt{5})/2$, soit 1.618 033 988 avec une infinité de décimales derrière. Quand j'ai dit en début de vidéo que le nombre d'or était égal à 1.618, j'ai fait une horrible approximation, j'espère que vous me le pardonnerez. Ghyka détaille dans ses livres des propriétés mathématiques du nombre d'or en le présentant comme un nombre au moins aussi important que pi ou e, mais il s'attarde surtout sur ses propriétés esthétiques. Selon Ghyka, le nombre d'or est une constante mathématique associée à la vie et qui gouverne l'Art sous toutes ses formes. Ce n'est pas une thèse qu'il sort de nulle part : il s'appuie en effet sur les travaux de nombreux scientifiques avant lui. Les mathématiciens et philosophes antiques comme Pythagore, Platon ou Euclide, sur des savants de la Renaissance, notamment Léonard de Vinci, et sur les scientifiques allemands du XIXe siècle, comme Fechner et Zeising. Tous ont travaillé autour du nombre d'or, bien avant qu'il ne porte ce nom.

On peut alors se demander pourquoi autant de scientifiques à travers les siècles se sont intéressés à ce nombre, $(1 + \sqrt{5})/2$. Qu'est ce qu'il a de si attrayant ? À vrai dire, il a fallu plusieurs millénaires avant que le nombre d'or soit considéré comme un nombre à part entière. Ce qui a intéressé les mathématiciens, c'est plutôt la proportion d'or, et sa plus ancienne trace écrite remonte au début du IIIe siècle avant notre ère.

On est donc deux siècles après Pythagore, et Euclide d'Alexandrie rédige la première version de l'un des plus grands best-seller de l'humanité, juste après la Bible : les *Éléments*.

Il s'agit d'un traité de mathématiques en 13 volumes qui expose l'ensemble des connaissances de l'époque en géométrie, l'étude des figures, et en arithmétique, l'étude des nombres. La forme est particulièrement moderne, puisque chaque résultat y est associé à sa démonstration. C'est le plus ancien ouvrage de mathématique présenté de la sorte qui a pu traverser les siècles. Chacun des livres traite de sujets différents. Par exemple, le livre I parle des bases de la géométrie, on y retrouve par exemple la propriété des angles d'un triangle d'avoir leur somme égale à 180° . Le livre 2 traite des identités remarquables et des équations du second degré, présentées de façon géométrique, l'algèbre ne sera inventée que bien des siècles plus tard. Le livre 3 parle des propriétés des cercles, et ainsi de suite. Dans la 11^e proposition du livre II, Euclide présente alors une construction qui semble aussi curieuse qu'inutile : il propose de partager le côté d'un carré en deux segments de telle sorte que l'aire du rectangle construit à l'intérieur du carré sur le petit segment soit égal à l'aire du carré construit sur l'autre segment. Il montre ensuite une construction géométrique qui permet de réaliser ce partage, et donne la démonstration de sa validité. Ce partage porte alors le nom de "partage en moyenne et extrême raison".

On peut alors se demander pourquoi Euclide a jugé pertinent d'introduire cette notion dès le livre II. Ce qu'il faut comprendre, c'est que cette construction ne doit être considérée que comme un outil nécessaire à des constructions géométriques plus élaborées. Ainsi, dans le livre IV, le partage en moyenne et extrême raison intervient dans la construction d'un triangle isocèle dont les angles de la base sont deux fois plus grands que le dernier angle. Ce triangle isocèle, lui, va intervenir à son tour dans la construction du pentagone régulier, le polygone à cinq côtés égaux et cinq angles égaux. Au passage, on peut remarquer que les diagonales d'un pentagone régulier se coupent les unes les autres en moyenne et extrême raison. Construire des pentagones réguliers, c'est au cœur de l'ultime livre des Éléments, le 13^e, celui qui traite de la construction des solides de Platon. Un solide de Platon, c'est un solide le plus régulier possible : toutes les faces sont identiques et sont des polygones réguliers. Avec 6 exemplaires d'un carré, on pourra construire un cube. Avec respectivement 4, 8 et 20 exemplaires d'un triangle équilatéral, il est possible de former un tétraèdre régulier, un octaèdre régulier ou un icosaèdre régulier. Enfin, avec 12 pentagones, on obtient le dernier des 5 solides de Platon, le dodécaèdre régulier. Bref, sans partage en moyenne et extrême raison, il est impossible de construire des pentagones réguliers, et donc, impossible de construire tous les solides de Platon. Et pour un mathématicien de l'Antiquité grec, c'est loin d'être anodin. Les solides de Platon font partie des objets mathématiques les plus importants de la géométrie grecque. Dans la pensée de Platon, l'univers physique est en effet écrit en langage mathématique, et les solides sont liés aux quatre éléments : le feu au tétraèdre, la terre au cube, l'eau à l'icosaèdre et l'air à l'octaèdre. Enfin, le dernier solide, le dodécaèdre, représente l'Univers.

Euclide donne au début du livre VI une autre définition du partage en moyenne et extrême raison : une ligne est dite coupée en moyenne et extrême raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit. En notation plus moderne, on peut voir cette définition sous la forme de deux rapports dans un segment qui doivent être égaux. On peut aussi voir ce problème d'Euclide sous la forme d'un problème géométrique équivalent. Considérons un rectangle. Quel doit être le format de ce rectangle pour que, si on lui retire un carré, le rectangle restant possède le même format que le rectangle initial ?

Ce rectangle que l'on recherche, c'est le rectangle d'or, et on pourra vérifier que le carré partage le rectangle en moyenne et extrême raison. Ce rectangle garde ses proportions

identiques lorsqu'on lui retire un carré. On peut donc à nouveau retirer un carré au petit rectangle, ce qui nous donne un nouveau rectangle, aux proportions toujours identiques. En poursuivant de la sorte, on peut construire une infinité de rectangles d'or emboîtés, et c'est en traçant un quart de cercle dans chacun des carrés retirés que l'on obtient une spirale, la fameuse spirale d'or.

Plus précisément, ce que l'on appelle le format d'un rectangle, c'est le rapport entre sa longueur et sa largeur. Si j'appelle ABCD le grand rectangle et EBCF le petit rectangle, alors il faut que le format de ABCD, c'est-à-dire AB/AD , soit égal à au format de EBCF, soit EF/EB . Puisque $AD = EF$ et que EB est égal à $AB - AD$, on a donc l'égalité $AB / AD = AD / (AB - AD)$. En notant X le format du grand rectangle, je vous laisse vérifier que l'on obtient l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré qui possède alors deux solutions réelles que l'on peut calculer avec la bonne vieille méthode du discriminant, et une seule des solutions est positive : $X = (1 + \sqrt{5})/2$. Le rectangle ABCD a donc pour format le nombre d'or, et le point E coupe alors le segment $[AB]$ en moyenne et extrême raison. Le calcul que je viens de vous proposer est cependant complètement anachronique puisque la construction d'Euclide n'utilise en réalité que des raisonnements géométriques, et qu'il n'est pas question de mélanger cela avec des nombres. Bon. Quitte à être anachronique, parlons rapidement de propriétés mathématiques du nombre d'or. Déjà, puisque ce nombre d'or est la solution de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$, il est ce que l'on appelle un nombre algébrique, c'est-à-dire, un nombre qui est la solution d'une équation polynomiale. Les nombres qui s'écrivent avec des racines sont en général algébriques, comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{2}$, mais il existe des nombres qui ne le sont pas, comme e ou π . Ces nombres sont appelés des nombres transcendants, et c'est d'ailleurs cette propriété de π qui rend impossible le célèbre problème de la quadrature du cercle. Bref. Le nombre d'or n'est pas un nombre transcendant, c'est un nombre algébrique.

Mais il y a une propriété encore plus importante, c'est que le nombre d'or est un nombre irrationnel. On dit qu'un nombre est rationnel quand il peut être écrit sous la forme d'une fraction de deux entiers, comme $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ou $8157/289$. Au contraire, quand il est impossible d'exprimer un nombre sous la forme d'une fraction de deux entiers, on dira que ce nombre est irrationnel. On peut démontrer que le nombre d'or ne pourra jamais s'exprimer de façon exacte comme un quotient de deux nombres entiers, c'est donc un nombre irrationnel. Cette propriété peut sembler un peu anecdotique en 2023, mais pour un contemporain de Pythagore, c'est tout autre chose.

Remontons donc au VI^e siècle avant notre ère. Pythagore, ce n'est pas qu'un théorème utile à l'étude de l'orthogonalité des dabs de Pogba, c'est surtout une figure incontournable des mathématiques de l'Antiquité. On ne connaît pas grand chose de sa vie, mais on connaît malgré tout les préceptes de sa communauté : végétarisme, exercices spirituels, et bien entendu pratique des mathématiques. Chez les Pythagoriciens, les nombres sont centraux. Mais pas n'importe quels nombres : les nombres entiers positifs. Pas de nombres à virgule, il faut attendre le XVI^e siècle pour ça. Pas de nombres négatifs, qui ne seront pas acceptés comme étant des nombres avant le XIX^e siècle. Pas de zéro non plus, qui sera popularisé par les mathématiciens arabes du Xe siècle. Et le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre à part entière, c'est simplement l'unité. Les fractions sont malgré tout considérées pour ce qu'elles représentent, des rapports entre deux nombres entiers, mais elles ne sont pas encore vues comme des nombres. Pour un mathématicien grec, un nombre, c'est donc uniquement un nombre entier supérieur ou égal à 2. Les nombres peuvent se représenter de

manière figuré, d'où la notion de nombres carrés comme 1, 4, 9, ou 16, ou de nombres triangulaires comme 1, 3, 6 ou 10. Ces représentations permettent de faire des démonstrations, comme par exemple le fait que les sommes de nombres impairs consécutifs à partir de 1 sont toujours égal à un nombre carré. Autre exemple. Si on retire une unité du carré d'un nombre impair, alors le résultat sera divisible par 8.

Une notion très importante en arithmétique est celle du pgcd, plus grand diviseur commun. Comment montrer que deux grandeurs données sont toutes les deux un multiple entier d'une même autre grandeur. Une méthode qui fonctionne bien est celle des soustractions successives, qui porte aussi le doux nom d'anthyphérèse. On part de deux quantités dont on cherche le diviseur commun, et on remplace la plus grande des deux par la différence entre les deux. On obtient alors deux nouvelles quantités, et on répète le processus jusqu'à ce que les quantités soient égales : on obtiendra alors le pgcd. Si j'applique ça par exemple sur les nombres 91 et 35, je commence par remplacer 91 par la différence de 91 et 35. On a donc maintenant 56 et 35. On recommence, on obtient alors 21 et 35. En poursuivant, on aura 21 et 14, puis 7 et 14, et enfin 7 et 7. Le pgcd de 91 et 35, c'est donc 7, le plus grand de leurs diviseurs communs. On peut se convaincre aisément que la méthode des soustractions successives fera apparaître des nombres entiers de plus en plus petits mais toujours positifs, ce qui implique qu'il n'y aura nécessairement qu'un nombre fini d'étapes. On dira alors que les deux grandeurs sont commensurables. Mais ça, c'est pas toujours le cas, et c'est quelque chose qui a révolutionné la pensée mathématique grecque.

Qu'est ce qu'il se passe en effet si on applique l'anthyphérèse à des grandeurs géométriques. Prenons pour cela une des figures géométriques les plus simples, le carré. Appelons-le ABCD. On va chercher le pgcd géométrique du côté AB et de sa diagonale AC. Quelle serait leur mesure commune. Commençons par chercher la différence entre AB et AC. Avec un arc de cercle centré en A, on peut reporter le point B sur la diagonale AC. On obtient alors le point E. Le pgcd de AB et AC est donc le même que celui de AB et de leur différence, qui est EC. Il faut donc à présent calculer la différence entre AB et EC. Pour cela, un petit raisonnement géométrique s'impose. On commence par tracer en E la perpendiculaire à (AC). Cette droite coupe le côté BC en F. Dans le triangle EFC, l'angle E est un angle droit, par construction, et l'angle C mesure 45° . Le dernier angle, F mesure donc aussi 45° , si bien que EFC est un triangle isocèle, ce qui implique donc que la longueur EC est égale à la longueur EF. On peut dans un second temps observer les triangles AFE et AFB. Ces deux triangles ont le côté AF en commun, ont leur côté AE et AB égaux et sont tous les deux des triangles rectangles : il sont donc égaux, si bien que la longueur EF est égale à la longueur FB. On a donc finalement $EC = BF$. La différence entre AB et EC que l'on cherche, c'est donc aussi la différence entre BC et BF : c'est FC. Le pgcd de AB et EC, c'est donc le pgcd de FC et EC. Sauf que FC et EC, ce n'est rien d'autre que la diagonale et le côté d'un carré, le carré CEFB. Autrement dit, la mesure commune entre la diagonale et le côté d'un carré, c'est aussi la mesure commune d'une diagonale et du côté d'un carré plus petit, qui lui-même est la mesure d'une diagonale et du côté d'un carré plus petit, et ainsi de suite. Ce processus pourrait donc être poursuivi à l'infini, les deux longueurs n'ont donc aucune mesure commune. Elles ne peuvent donc pas être toutes les deux des nombres entiers, car si c'était le cas, le processus nous aurait donné leur pgcd en un nombre fini d'étapes. On dit alors que le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables.

Quand on est Pythagoricien et qu'on voit le monde mathématiquement uniquement à travers le prisme des nombres entiers ou de leurs rapports, cette révélation a de quoi choquer. Selon la légende, le premier mathématicien qui avait fait cette découverte aurait été jeté à la mer, car une telle ignominie se devait de rester cachée.

Aujourd'hui, on ne parle plus vraiment de grandeur incommensurable, mais de nombres irrationnels. Le nombre $\sqrt{2}$, qui est le rapport entre la diagonale de n'importe quel carré et son côté, est un exemple : il ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers. C'est aussi le cas du nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$, et de manière générale des nombres qui s'écrivent comme la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré. Chez les savants grecs de l'Antiquité, ces irrationnels n'existent pas en tant que nombres. Mais, ils sont malgré tout très bien identifiés dans des constructions géométriques comme dans la diagonale d'un carré par exemple, mais aussi dans la hauteur d'un triangle équilatéral ou dans les diagonales des pentagones. Mais ce sont simplement des propriétés des figures géométriques. Il ne viendrait donc pas à l'idée d'un savant grec d'utiliser volontairement des rapports incommensurables dans l'élaboration d'une œuvre.

Les théories esthétiques grecques ne s'appuient en fait pas du tout sur le nombre d'or. Pour comprendre ça, il faut revenir à l'homme de Vitruve. Ce que De Vinci dessine, ce sont les proportions idéales d'un corps humain au sens de Vitruve, un architecte romain du I^{er} siècle. En effet, dans l'architecture grecque, et c'est ce que Vitruve explique dans son traité *De Architectura*, les proportions des bâtiments doivent obéir à des règles mathématiques qui s'appuient sur les nombres entiers et leur rapport. Je vous renvoie à la vidéo d'Architekton qui explore plus précisément le sujet. Pour le corps humain, on est dans les mêmes considérations géométriques : un homme debout, les bras écartés, peut s'inscrire dans un carré, tandis que les membres étendus, il pourra s'inscrire dans un cercle centré sur le nombril. La hauteur d'une tête, du sommet du crâne jusqu'au bas du menton, c'est 1/8 de la hauteur d'un homme et la distance entre le haut de la poitrine et le sommet de la tête, c'est 1/6 de la hauteur. Autrement dit, selon les canons esthétiques grecs, les proportions idéales d'un corps humain sont des rapports rationnels, entre des nombres entiers. Le nombre d'or étant une grandeur par nature irrationnelle, c'est forcément un contresens de l'appliquer à des créations grecques comme le Parthénon, ou d'inspiration grecque comme l'homme de Vitruve.

Et puisque l'on parle de l'homme de Vitruve, il faut évoquer le cas Léonard de Vinci, dont le nom revient très souvent quand on évoque les œuvres dans lesquelles le nombre d'or est censé apparaître, de la Cène jusqu'à la Joconde. De Vinci étant la figure du génie authentique, tous les sujets auxquels il s'est intéressé se doivent d'être d'importance majeure. Il n'a pourtant jamais écrit de sa main quoi que ce soit en lien avec le nombre d'or. Malgré tout, il a participé à la conception d'un livre mettant sur le devant de la scène ce qui deviendra le nombre d'or : *De Divina Proportione*, de Luca Pacioli, publié en 1509. Pacioli, c'est un professeur de mathématiques, mais surtout un moine franciscain contemporain de De Vinci. Au début du XVe siècle, il s'intéresse aux Éléments d'Euclide, et s'émerveille du partage en extrême et moyenne raison d'Euclide, qui permet la construction de pentagone ou de dodécaèdres. Une telle perfection ne peut être selon lui que l'œuvre de Dieu, qu'il rebaptise alors "divine proportion". Le livre de Pacioli reste avant tout un ouvrage de mathématiques dans lequel il démontre, dans la pure tradition d'Euclide, les liens entre sa divine proportion et les polyèdres chers à Platon. L'ouvrage ne prête donc en aucun cas des

propriétés esthétiques à cette proportion divine. Les seuls apports de De Vinci aux écrits de Pacioli se résument en fait à une série de dessins de géométrie représentant une grande variété de volumes.

Lors de la publication de son livre en 1509, Pacioli y ajoute plusieurs appendices, notamment un traité d'architecture inspiré de Vitruve, mais sans rapport direct avec la première partie. Les théories esthétiques qui y sont développées, qui concernent l'architecture et le corps humain, sont inspirées directement de celles des Grecs, et s'appuient donc sur les rapports de nombres entiers, aucun lien avec la proportion divine. Il n'y a donc a priori aucune bonne raison à ce que les artistes de la Renaissance aient volontairement utilisé cette proportion d'or dans leurs œuvres, puisqu'il ne s'agit à ce moment de l'histoire que d'une notion mathématique.

Le souci, c'est qu'avec le temps, l'implication de De Vinci dans le livre, ainsi que l'indépendance entre les différentes parties vont devenir floues, donnant naissance à partir du XVIIIe siècle au mythe d'un lien entre proportion divine et canons esthétiques.

Au cours des siècles qui vont suivre, de nombreux scientifiques, comme Johannes Kepler ou Michel Chasles, vont s'intéresser de près à cette divine proportion. Mais c'est chez les psychologues allemands du XIXe siècle que cette notion de proportion divine va prendre une autre direction. Dans les années 1850 en Allemagne, on cherche une réponse scientifique à la question : qu'est ce que le beau ? De nombreux auteurs vont proposer leur réponse, si possible mathématique. On a par exemple le médecin Franz Liharzik qui propose une théorie esthétique qui s'appuie sur un carré magique de côté 7, ou le moine bénédictin Odilo Wolff, qui trouve dans l'hexagramme une loi unique et fondamentale de la perfection. Mais la théorie qui restera, c'est celle du philosophe Adolf Zeising, la théorie de la section d'or. En 1854, il publie *Nouvelles leçons sur les proportions du corps humain*, et il y propose une loi universelle qui gouvernerait la beauté. Son hypothèse, c'est que l'harmonie réside essentiellement dans les proportions. Lorsqu'un segment est découpé en deux, le rapport entre les deux morceaux n'est a priori pas égal au rapport entre le plus grand morceau et le tout. Sauf dans le cas d'un découpage selon la proportion divine, ce qui fait de ce découpage une parfaite harmonie de proportions. Sous la plume de Zeising, la divine proportion prend alors le nom de section divine, et est considérée alors aussi bien comme une proportion que comme un nombre à part entière, $(1+\sqrt{5})/2$

Zeising s'empresse alors de vérifier que sa section dorée est le mètre étalon de l'harmonie dans l'art et dans la nature. Et quand on cherche, on trouve. Il montre par exemple que le squelette humain suit parfaitement les mesures de la section dorée, quitte à tordre un peu les proportions humaines pour que son exemple soit plus recevable. Il retrouve aussi sa section dans les minéraux, les plantes ou l'architecture.

Zeising se voit opposer certaines critiques, en particulier par Gustav Fechner qui trouve sa loi un peu trop arbitraire. Il se propose alors en 1876 de mettre tout le monde d'accord avec une expérience scientifique. Il présente à 250 volontaires plusieurs rectangles de cartons blancs de même surface mais de format différent, allant d'un carré, de format 1, jusqu'à un rectangle allongé de format 5/2. Les volontaires doivent alors choisir celui qu'ils jugent le plus agréable et rejeter celui qu'ils jugent le moins agréable, en dehors de toute application pratique. Les participants peuvent éventuellement choisir plusieurs rectangles. Il ressort alors de cette expérience que un peu plus d'un tiers des participants ont préféré le rectangle de format 34/21, qui s'approche le plus d'un rectangle d'or. Les deux rectangles de formats les

plus proches, celui de format 3/2 et celui de format 23/13, sont eux aussi plébiscités. Les autres rectangles, eux, ont eu bien moins de succès. Réciproquement, quand il s'agit de rejeter des rectangles, aucun participant n'a désigné le rectangle d'or, c'est plutôt le rectangle trop long qui a été écarté. Une première étude qui va finalement dans le sens de Zeising, bien que la conclusion ne soit pas complètement franche.

Fechner ne s'arrête pas là, et réalise une seconde expérience, en présentant cette fois-ci à ses volontaires différentes croix issues du commerce qui présentent différentes proportions. Cette-fois ci, c'est la croix de Saint-André, de rapport 1:1, qui est préférée, ce qui va à l'encontre des résultats de l'expérience précédente.

Depuis Fechner, de nombreux psychologues ont étudié la question. En 1995, le psychologue canadien Christopher Green a d'ailleurs compilé une quarantaine d'études, de 1874 jusqu'à 1992, et les différents résultats sont loin d'être unanimes. Bien qu'ils tournent pour la plupart autour d'une préférence pour le rapport 1.6, celle-ci n'est jamais très marquée, et jamais précisément sur le rapport d'or. J'ai moi-même tenté de reproduire cette expérience en 2017 sur Twitter. Sur un échantillon de 772 personnes à qui j'ai demandé de noter des rectangles de 0 à 5, le rectangle d'or à l'orientation paysage a reçu la meilleure note moyenne, suivi de près par le rectangle de format 16/9, et le rectangle de format $\sqrt{2}$. Bref, il semble se dégager une légère préférence des gens pour les rectangles aux formats proches du rectangle d'or, mais rien qui ne justifie d'en faire une règle déterminante.

Ainsi, avec les travaux de Zeising et Fechner, la section d'or a pris une assise scientifique, et les idées ont commencé à se diffuser dans les milieux artistiques de la fin du XIXe siècle. C'est à partir de ce moment que rencontrer des rapports proches du nombre d'or au détour d'une peinture ne sera plus forcément une coïncidence. Les peintres pointillistes du mouvement néo-impressionniste comme George Seurat, Paul Signac ou Camille Pissarro, sont parfois associés au nombre d'or, leur travail sur les couleurs et les lumières se voulant guidé par la science. Ces artistes ont en effet été plutôt proches du critique d'art Charles Henry, grand défenseur d'applications géométriques à l'art, dont entre autres celle de la section dorée.

Comment juger alors si le fait de retrouver le nombre d'or dans une peinture est un choix de l'artiste ou bien une coïncidence ? Prenons par exemple Parade de Cirque, de George Seurat. Sa composition est clairement géométrique, avec des lignes horizontales et verticales très marquées. On peut voir par exemple que le personnage central est situé très exactement sur la verticale centrale. Quand on observe les trois musiciens de gauche, on peut voir que le troisième est situé sur une verticale qui coupe le cadre selon une section dorée. Ou alors, autre hypothèse, il est placé sur la ligne des $\frac{3}{8}$, les deux autres étant placés à $\frac{1}{8}$ et $\frac{2}{8}$. Cette deuxième hypothèse semble un peu plus plausible, l'artiste a probablement découpé son cadre en 2, puis en 2, puis encore en 2, d'où le découpage selon des huitièmes. Et le problème des fractions $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{8}$, c'est qu'elles ressemblent quand même énormément à un partage selon le nombre d'or. L'apparente omniprésence de la section d'or dans les peintures peut donc s'expliquer assez simplement par la tendance des artistes à utiliser des partages simples en moitié, quart et huitième, et ce bien avant les théories esthétiques de Zeising.

La section d'or commence à vraiment avoir de l'écho chez certains artistes du début du XXe siècle, en particulier dans le mouvement puriste, incarné par Amédée Ozenfant et ses natures mortes, ou Le Corbusier et ses cités radieuses. Leur crédo, c'est que la création artistique doit se rapprocher de l'esprit scientifique. Grâce à l'approche expérimentale de

Fechner, la section d'or devient l'une des premières lois esthétiques des puristes. À la fin de sa vie, Ozenfant reviendra dans ses *Mémoires* sur ses années puristes. Il reconnaît alors que cette recherche de proportion parfaite appuyée sur des principes mathématiques était complètement illusoire. Selon lui, l'art est fait d'illusions relatives, les couleurs viennent nécessairement déformer les rapports formels.

Depuis un siècle, le nombre d'or a poursuivi son chemin, et s'est fait une petite place dans la culture populaire. On le retrouve par exemple au centre de l'intrigue de la série de 2012 *Touch*, ou bien en 2008 dans une enquête dans un épisode de la 4e saison de la série *Esprits Criminels*. L'apparition la plus remarquée restera malgré tout en 2004. Lorsque Dan Brown écrit *Da Vinci Code*, il convoque le symbole du nombre d'or et tout ce qui lui est associé, du Parthénon jusqu'à la Joconde. C'est cet imaginaire ésotérique qui fait aujourd'hui du nombre d'or un concept central de la géométrie sacrée, que l'on retrouve dans les courants New Âge. Cette idée que la perfection géométrique serait capable de soigner vos énergies en éloignant les mauvaises ondes, et autres joyeusetés de ce genre. On le retrouve aussi dans certaines thèses complotistes, assurant que les Égyptiens n'ont pas pu construire seuls les Pyramides, la preuve, c'est le nombre d'or. Dans un tout autre registre, on pourrait parler de cette trend sur Instagram ou Tiktok qui consiste à photoshoper le visage d'une célébrité pour le faire rentrer dans un masque basé sur le nombre d'or. Une façon détournée d'utiliser l'aura de la science et des mathématiques pour justifier l'utilisation de la retouche d'image. Ça va même jusqu'à ce chirurgien esthétique qui a établi un classement de beauté des stars selon le nombre d'or, afin d'encourager les autres femmes à faire appel à ses services.

Bref. Dans tout ça, je n'ai pas vraiment parlé des applications du nombre en mathématiques, et pour cause, elles sont plutôt rares. On lui trouve quelques curiosités, notamment en lien avec la suite de Fibonacci, et il apparaît dans quelques constructions géométriques assez plaisantes. Il a aussi quelques propriétés algébriques assez intéressantes, mais à part ça, pas grand chose. C'est très loin d'être la constante mathématique la plus passionnante, bien loin derrière des nombres comme π ou e .

Le dernier point que je n'évoquerai pas dans cette vidéo, ce sont les liens entre le nombre d'or et la nature. Oui, il y a bien des liens entre le nombre d'or et la pousse de certains végétaux, mais ce n'est pas du tout une règle absolue. La plupart des spirales de la nature, de la coquille des escargots aux bras de la galaxie, en passant par les ouragans ou l'enroulement de l'ADN, n'ont rien à voir avec le nombre d'or. Bref, la proportion divine, la section dorée, le nombre d'or, appelez-le comme vous voulez, il a eu ses heures de gloire dans le passé, mais il serait maintenant temps de passer à autre chose.

Livres :

Ma principale source :

Le nombre d'or, radiographie d'un mythe - Marguerite Neveux -

<https://www.parislibrairies.fr/livre/9782757838921-le-nombre-d-or-radiographie-d-un-mythe-la-divine-proportion-marguerite-neveux-herbert-e-huntley/>

Etudes, articles :

<https://images.math.cnrs.fr/Le-nombre-d-or-en-mathematique.html>

Mon étude : [Régions une bonne fois pour toute cette histoire de nombre d'or](http://www.yorku.ca/christo/papers/Green.golden.Perception-1995.pdf)
<http://www.yorku.ca/christo/papers/Green.golden.Perception-1995.pdf>
<https://www.drgoulu.com/wp-content/uploads/2016/04/nombredor.pdf>

Autres liens 🍷:

[La géométrie dite «sacrée»](#)

[Qu'est ce que la géométrie sacrée ? - Introduction - Martouf le Synthéticien](#)

[Who Is the Most Beautiful Woman in the World?](#)

<https://www.cnews.fr/divertissement/2022-10-14/beaute-selon-les-mathematiques-cette-actrice-britannique-est-la-plus-belle>

[Perfect facial features : la tendance "golden ratio" révoltante](#)

Livres historiques 📖

Le nombre d'or - Ghyka -

<https://archive.org/details/lenombredor0000ghyk/page/n5/mode/2up>

Les Elements - Euclide :

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k110982q/f1.double.r=les+%C3%A9l%C3%A9ments+d'Euclide>, [Mathematics and Mathematical Astronomy](#), [EUCLIDE Éléments de Géométrie LIVRE II](#)

De Architectura - Vitruve - <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Vitruve/index.htm>,

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k85660b/f94.item>

De Divina Proportione - Luca Pacioli - [Divina proportione : Internet Archive](#)

Adolf Zeising - Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers - '[Zeising, Adolf: Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers](#)', Image 1 of 488

Fechner : <https://www.projekt-gutenberg.org/fechner/vaestht1/vaesth14.html>

L'essprit Nouveau - Disponible sur <https://portaildocumentaire.citedelarchitecture.fr>

Peintures et dessins 🎨:

Lettres de Pacioli : [Category:Font design by Luca Pacioli - Wikimedia Commons](#)

Botticelli - Le printemps - [File:Sandro Botticelli - La Primavera](#)

Botticelli - La naissance de Vénus - [File:Sandro Botticelli - La nascita di Venere](#)

Botticelli - L'Annonciation du Cestello - [File:Botticelli, annunciazione di cestello 02](#)

Botticelli - Vénus et Mars - [File:Venus_and_Mars_National_Gallery](#)

Botticelli - Pallas et le Centaure - [File:Pallade col Centauro, Sandro Botticelli \(1482\)](#)

Vermeer - La Jeune Fille à la Perle - [File:1665 Girl with a Pearl Earring](#)

Léonard de Vinci - La Cène - [File:Leonardo da Vinci - The Last Supper \(1495-1498\)](#)

Léonard de Vinci - La Joconde

Léonard de Vinci - Un ravin - [File:Leonardo da Vinci - A ravine, c.1482-5.jpg - Wikimedia Commons](#)

Léonard de Vinci - Codex Atlanticus (F0812) - [File:Leonardo Card Drawing](#)

Léonard de Vinci - Expériences d'optique, étude des ombres - [File:Study of the Graduations of Shadows on Spheres 2](#)

Léonard de Vinci - RCIN 919000 - [File:Leonardo da Vinci - RCIN 919000](#)

Léonard de Vinci - Codex Vallardi 2282 - [File:Léonard de Vinci - Codex Vallardi 2282 r](#)

Filippo Lippi - Madonna and Child - [File:Workshop of Filippo Lippi - Madonna and Child](#)

Dali - La dernière cène - [File:Dali - The Sacrament of the Last Supper - lowres](#)

Seurat - *Une baignade à Asnières* - [File:Baigneurs a Asnieres.jpg - Wikimedia Commons](#)

Signac - Golfe Juan - [File:Golfe Juan by Paul Signac \(1863-1935\)](#)

Pissaro - Boulevard Montmartre, Effet de nuit - [File:Camille Pissarro 009](#)

Signac - [File:Signac - Portrait de Félix Fénéon.jpg - Wikipedia](#)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Application_of_Charles_Henry%27s_Chromatic_Circle:_Th%C3%A9%C3%A2tre-Libre_playbill_of_January_31,_1889_MET_70C_033R4.jpg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:La_Gare_Saint-Lazare_-_Claude_Monet.jpg

[File:Amédée Ozenfant, 1921, Nature morte au verre de vin rouge \(Still Life with Glass of Red Wine\), oil on canvas, 50.6 x 61.2 cm, Kunstmuseum, Basel.jpg - Wikipedia](#)

[File:Amédée Ozenfant, 1920, Still Life, Dishes, oil on canvas, 72 x 59.5 cm, Hermitage Museum.jpg - Wikipedia](#)

Vidéos 🎬 :

Touch - S01E01

Esprits Criminels - S04E08

▶ [HIDDEN MATHEMATICS - Randall Carlson - Ancient Knowledge of Space, Time & Co...](#)

▶ [Ancient Aliens: Great Pyramid's Shocking Precision \(Season 12\) | History](#)

[Is Angelina Jolie Perfect? I Trying the golden ratio to her face - YouTube](#)

[Giving Celebrities the "Golden Ratio" \(PHOTOSHOP\) - YouTube](#)

Crédits photos 📷 :

Grande pyramide de Kheops: [File:Kheops-Pyramid.jpg - Wikimedia Commons](#)

Pyramide de Khephren : [File:Kheops-Pyramid.jpg - Wikimedia Commons](#)

Pyramide de Mykérinos : [File:Menkaure's pyramid.jpg - Wikimedia Commons](#)

Portraits anonymes : [ThisPersonDoesNotExist.com](#)

Beyoncé : [File:Beyonce Knowles with necklaces.jpg - Wikimedia Commons](#)

Bella Hadid : [File:Bella Hadid Cannes 2018 2.jpg - Wikimedia Commons](#)

Léonard de Vinci : [File:Leonardo da Vinci. Line engraving by P. Anderloni after G. B Wellcome V0006066.jpg - Wikimedia Commons](#)

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snail_Shell_\(139130289\).jpeg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snail_Shell_(139130289).jpeg)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tropical_Cyclone_Jasmine_-_NASA_Earth_Observatory.jpg

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1DNA.gif>

Photos de petits chats 🐱:

<https://www.boredpanda.com/fibonacci-composition-cats-furbonacci/>