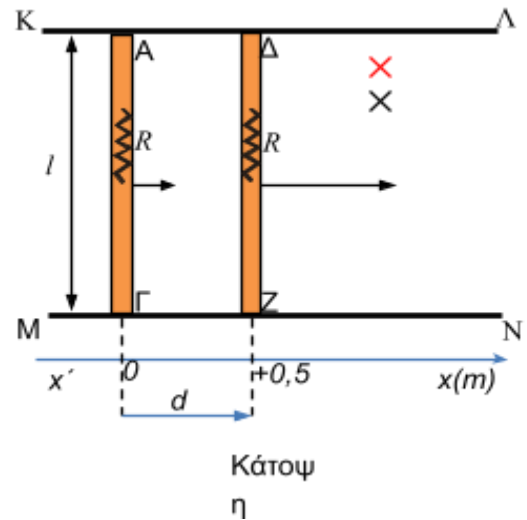


Δύο αγωγοί και το φαινόμενο της επαγωγής

Δυο ευθύγραμμα παράλληλα μεταλλικά σύρματα ΚΛ και ΜΝ μεγάλου μήκους, χωρίς αντίσταση, βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση $l = 1\text{m}$ μεταξύ τους, μέσα σε κατακόρυφο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ μέτρου $B = 0,2\text{T}$, που εκτείνεται σε όλο το χώρο που βρίσκονται τα σύρματα και έχει φορά προς τα κάτω. Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι αγωγοί ΑΓ και ΔΖ μήκους l και ίδιας αντίστασης $R = 0,2\Omega$, έχουν τα άκρα τους διαρκώς σε επαφή με τα σύρματα ΚΛ και ΜΝ, παραμένοντας κάθετοι σε αυτά όπως στο σχήμα. Τα άκρα Γ και Ζ των αγωγών βρίσκονται τη χρονική στιγμή $t = 0$, στις θέσεις $x = 0$ και $x = d = +0,5\text{m}$ ενός άξονα $x'x$ και οι αγωγοί ολισθαίνουν χωρίς τριβές, έχοντας σταθερές ομόρροπες ταχύτητες μέτρων $v = 2\text{m/s}$ και $3v$ αντίστοιχα, κατά τη θετική φορά του άξονα, δεχόμενοι κατάλληλες εξωτερικές δυνάμεις στη διεύθυνση της κίνησης.



α) Αφού γράψετε τη συνάρτηση με το χρόνο, του εμβαδού $S = (AGZD)$ του ορθογωνίου ΑΓΖΔ, που περικλείεται από τους αγωγούς, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής αυτού του εμβαδού.

β) Να εξηγήσετε γιατί θα αναπτυχθεί ΗΕΔ επαγωγής στο κύκλωμα, να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της και την αλγεβρική τιμή της έντασης του επαγωγικού ρεύματος.

γ) Να σχεδιαστεί η φορά του επαγωγικού ρεύματος, δικαιολογώντας την επιλογή σας.

Θεωρείστε το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{n}$ ομόρροπο του $\vec{B}$.

δ) Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις Laplace. Ποια είναι η μηχανική ισχύς που προσφέρεται στο κύκλωμα;

ε) Υπολογίστε το πλήθος των ηλεκτρονίων που θα διακινηθούν στο κύκλωμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 1\text{s}$, αν το φορτίο ενός ηλεκτρονίου είναι $e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.

στ) Τι κίνηση θα εκτελέσουν οι αγωγοί αν καταργήσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις;

Απάντηση

α) Η μεταβολή στο εμβαδόν οφείλεται στην αύξηση της απόστασης ανάμεσά τους αφού ο αγωγός ΔΖ έχει μεγαλύτερη ταχύτητα (σχήμα 1). Σε μια τυχαία χρονική στιγμή t , οι θέσεις των αγωγών ΑΓ και ΔΖ ως προς τον άξονα $x'x$ θα είναι αντίστοιχα

$$x_1 = v \cdot t$$

και $x_2 = d + 3v \cdot t$

Η απόσταση μεταξύ τους είναι κάθε στιγμή

$$D = |x_2 - x_1| \Leftrightarrow D = |d + 3v \cdot t - v \cdot t| \Leftrightarrow D = d + 2v \cdot t \quad (1)$$

Άρα το εμβαδόν S του ορθογωνίου θα έχει τιμή

$$S = D \cdot l \xrightarrow{(1)} S = (d + 2v \cdot t) \cdot l \Leftrightarrow S = 2lv \cdot t + dl$$

Με αντικατάσταση $S = 4 \cdot t + 0,5 \text{ (S.I.)} \quad (2)$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου (γραφική παράσταση ευθεία) και η κλίση της ή ο ρυθμός μεταβολής της είναι σταθερή, ίση με

$$\frac{dS}{dt} = 4 \text{ m}^2 / \text{s}$$

β) Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το βρόχο ΑΓΖΔ μεταβάλλεται, λόγω αύξησης του εμβαδού της. Σύμφωνα με το νόμο Faraday θα αναπτυχθεί ΗΕΔ επαγωγής,

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d(B \cdot S \cdot \sin\theta)}{dt} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi} = -B \cdot \frac{dS}{dt} \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi} = -0,2 \cdot 4 \Leftrightarrow E_{\varepsilon\pi} = -0,8 \text{ V}$$

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος (σύνδεση σε σειρά) είναι $R_{\text{ολ}} = 2R = 0,4 \Omega$.

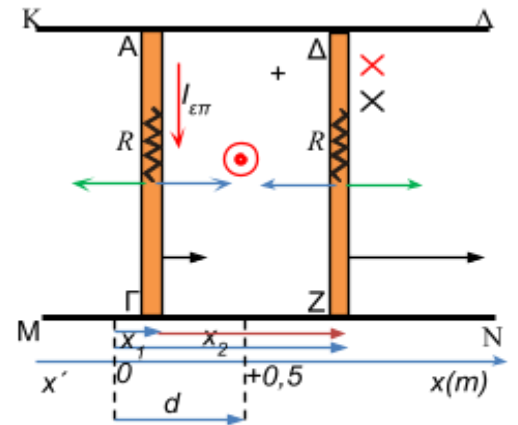
Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος σύμφωνα με το νόμο του Ohm θα είναι τότε

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{\text{ολ}}} = \frac{-0,8}{0,4} = -2 \text{ A}$$

γ) Ο κανόνας Lenz μας λέει ότι το επαγωγικό ρεύμα πρέπει να έχει τέτοια φορά ώστε το μαγνητικό του πεδίο $\vec{B}_{\varepsilon\pi}$ να αντιστέκεται στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Άρα πρέπει να έχει αντίθετη φορά από το διάνυσμα $\vec{B}$. Ο κανόνας του δεξιού χεριού μας δίνει τότε φορά επαγωγικού ρεύματος αριστερόστροφη (αντιωρολογιακή), όπως φαίνεται στο σχήμα 1, που διαρρέει τον αγωγό ΑΓ από το Α προς το Γ.

□ Θα μπορούσαμε να βρούμε τη φορά του επαγωγικού ρεύματος, αν χρησιμοποιήσουμε

την αλγεβρική μορφή του νόμου Faraday. Με βάση το εμβαδικό διάνυσμα $\vec{n}$ όπως φαίνεται στο σχήμα 1, θετική φορά διαγραφής του βρόχου, είναι η δεξιόστροφη (ωρολογιακή), δηλαδή



Σχήμα
1

επαγωγικό ρεύμα αυτής της φοράς, έχει θετική αλγεβρική τιμή. Βρήκαμε $I_{\varepsilon\pi} = -2A$, που σημαίνει ότι η φορά του θα είναι αρνητική, δηλαδή αριστερόστροφη (αντιωρολογιακή).

δ) Με βάση τον κανόνα των τριών δαχτύλων, οι δυνάμεις Laplace σχεδιάζονται στο σχήμα 1. Η σταθερή ταχύτητα επιβάλλει, σε κάθε αγωγό να ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, με αντίθετη φορά από τη δύναμη Laplace, ώστε

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F_{\varepsilon\xi} = F_L = B \cdot I_{\varepsilon\pi} \cdot l = 0,2 \cdot 2 \cdot 1 = 0,4 N$$

Ισχύς προσφέρεται από την $\vec{F}_{\varepsilon\xi,2}$ και αφαιρείται από την $\vec{F}_{\varepsilon\xi,1}$, άρα

$$P_{\mu\eta\chi} = F_{\varepsilon\xi,2} \cdot 3v - F_{\varepsilon\xi,1} \cdot v = 2 \cdot F_{\varepsilon\xi} \cdot v = 2 \cdot 0,4 \cdot 2 = 1,6 W$$

Την ίδια στιγμή ο ρυθμός παραγωγής θερμικής ενέργειας στις αντιστάσεις του κυκλώματος είναι $P_{\Theta} = I_{\varepsilon\pi}^2 \cdot R_{\sigma\lambda} = 4 \cdot 0,4 = 1,6 W$. Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η αρχή διατήρησης ενέργειας.

□ Αν σχεδιάζαμε πρώτα τις δυνάμεις Laplace, λέγοντας ότι «σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, πρέπει να αντιστέκονται στην κίνηση», θα βρίσκαμε λάθος την κατεύθυνση της $\vec{F}_{L,1}$, γιατί ο θεμελιώδης αυτός κανόνας καθορίζει τη φορά του ρεύματος και της δύναμης Laplace και όχι η δύναμη Laplace τη φορά του ρεύματος.

ε) Η μεταβολή της μαγνητικής ροής μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = B \cdot (S_1 - S_0) \xrightarrow{(2)} \Delta\Phi = 0,2 \cdot (4 \cdot 1 + 0,5 - 0,5) \Leftrightarrow \Delta\Phi = 0,8 Wb$$

$$\Delta q_{\varepsilon\pi} = -\frac{\Delta\Phi}{R_{\sigma\lambda}} = -\frac{0,8}{0,4} = -2C$$

Από το νόμο Newman έχουμε

και η κβάντωση του φορτίου επιβάλλει

$$|\Delta q_{\varepsilon\pi}| = N \cdot |e| \Leftrightarrow N = \frac{2}{1,6 \cdot 10^{-19}} \Leftrightarrow N = 1,25 \cdot 10^{19} \text{ ηλεκτρ. νια}$$

Σχόλιο (που θα μπορούσε να είναι και ερώτημα...)

Αν καταργήσουμε τις εξωτερικές δυνάμεις, ο αγωγός ΑΓ επιταχύνεται από την $\vec{F}_{L,1}$ ενώ ο αγωγός ΔΖ επιβραδύνεται από την $\vec{F}_{L,2}$. Άρα η ταχύτητα v_1 του ΑΓ αυξάνεται ενώ η ταχύτητα v_2 του ΔΖ μειώνεται και κάποια στιγμή θα είναι $v_1 = v_2 = v_*$.

Η ΗΕΔ επαγωγής απολύτως στο κύκλωμα είναι μεταβλητή και δίνεται από τη σχέση

$$|E_{\varepsilon\pi}| = B \cdot \frac{dS}{dt} = B \cdot \frac{(l \cdot dx_2 - l \cdot dx_1)}{dt} = B \cdot l \cdot \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) = B \cdot l \cdot (v_2 - v_1)$$

$$|I| = \frac{Bl(v_2 - v_1)}{R_{ολ}}$$

οπότε το επαγωγικό ρεύμα θα έχει απόλυτη τιμή

Από την τελευταία βλέπουμε ότι όταν $v_1 = v_2 = v_k$, $I = 0$ άρα και $F_{L,1} = F_{L,2} = 0$, που σημαίνει ότι η απόσταση ανάμεσα στους αγωγούς θα παραμένει πλέον σταθερή και οι αγωγοί θα κινούνται με σταθερές ίσες ταχύτητες.

Αν θέλουμε να τις υπολογίσουμε, αρκεί να σκεφτούμε ότι το σύστημα των δυο αγωγών είναι μονωμένο και να εφαρμόσουμε την ΑΔΟ:

$$m \cdot v_1 + m \cdot v_2 = 2m \cdot v_k \Leftrightarrow v_k = \frac{v_1 + v_2}{2} \Leftrightarrow v_k = 2v = 4m / s$$

Ανδρέας Ριζόπουλος