

Quelques aspects de la physique des milieux granulaires

Première partie Hystérésis de frottement

1. Soient N et T les composantes normale et tangentielle de l'action de la paroi inclinée sur la brique. Ecrivons que la résultante des forces appliquées à la brique est nulle à l'équilibre :

- en projection sur Ox : $-kx + T + P \sin \theta = 0$
- et sur l'axe orthogonal : $N - P \cos \theta = 0$

La condition d'équilibre $|T| \leq \mu_S |N|$ s'écrit donc $|kx - P \sin \theta| \leq \mu_S P \cos \theta$, soit :

$$\frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_S \cos \theta) \leq x \leq \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_S \cos \theta)$$

Pour $\theta = 0$ cette relation devient $-\frac{\mu_S P}{k} \leq x \leq \frac{\mu_S P}{k}$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on obtient l'unique position d'équilibre $x = \frac{P}{k}$ car les frottements n'interviennent plus.

2. On suppose pour toute la suite de cette partie que le frottement visqueux qui se substitue au frottement solide en cas de glissement est suffisamment important pour que le mouvement soit apériodique. La vitesse initiale étant nulle, x ne peut donc pas présenter d'extremum pendant une phase de glissement, de sorte que la position d'équilibre atteinte est

toujours celle que l'on obtiendrait en l'absence de frottements : $x = \frac{P}{k} \sin \theta$.

Dans cette question 2), on part à chaque étape de cette position d'équilibre, soit :

$$x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+ \quad \text{avec} \quad x_0^+ = 0 \quad \text{et} \quad \theta_0^+ = 0$$

Ensuite on augmente θ , par conséquent la condition $x \leq \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_S \cos \theta)$ reste constamment vérifiée, la rupture

d'équilibre se produisant lorsque la condition $\frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_S \cos \theta) \leq x$ n'est plus vérifiée, donc :

$$\frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^+ - \mu_S \cos \theta_{i+1}^+) = x_i^+$$

On peut déduire de ces deux relations une relation de récurrence pour les angles : $\sin \theta_{i+1}^+ - \mu_S \cos \theta_{i+1}^+ = \sin \theta_i^+$

Si on introduit l'angle de frottement défini par $\varphi_S = \text{Arctan} \mu_S$, la relation de récurrence devient :

$\frac{\sin(\theta_{i+1}^+ - \varphi_S)}{\cos \varphi_S} = \sin \theta_i^+$, soit : $\theta_{i+1}^+ = \varphi_S + \text{Arcsin}(\sin \theta_i^+ \cos \varphi_S)$, relation qui permet le calcul effectif de la suite des θ_i^+ .

Quand $\theta_i^+ \rightarrow \frac{\pi}{2}$, alors $\cos \theta_i^+ \rightarrow 0$, et la relation de récurrence montre que $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \rightarrow 0$. Il faut en théorie une infinité de glissements successifs pour atteindre la position finale.

3. On part maintenant de la verticale : $x_0^- = \frac{P}{k}$ et $\theta_0^- = \frac{\pi}{2}$. On aura toujours $x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$

Cette fois, après chaque immobilisation, θ diminue : la condition $\frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_S \cos \theta) \leq x$ reste donc vérifiée, et la

rupture d'équilibre se produit lorsque la condition $x \leq \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_S \cos \theta)$ n'est plus vérifiée, donc :

$$\frac{P}{k} (\sin \theta_{i+1}^- + \mu_S \cos \theta_{i+1}^-) = x_i^-$$

La relation de récurrence pour les angles successifs est : $\sin \theta_{i+1}^- + \mu_S \cos \theta_{i+1}^- = \sin \theta_i^-$.

On peut en tirer : $\theta_{i+1}^- = -\varphi_S + \text{Arcsin}(\sin \theta_i^- \cos \varphi_S)$

Pour ce parcours inverse, la position $\theta = 0$ est atteinte en un nombre fini d'étapes.

4. Voici le graphe du plan (θ, x) décrivant la montée et la descente. On utilise les trois courbes :

- $x = \frac{P}{k} \sin \theta$ (points représentant la fin d'une phase de glissement)
- $x = \frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_S \cos \theta)$ (début d'une phase de glissement quand θ augmente)
- $x = \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_S \cos \theta)$ (début d'une phase de glissement quand θ diminue)

On observe l'existence de "chemins" différents à la montée et à la descente ; de plus, la position d'équilibre finale $\theta = 0$ ne correspond pas, en général, à $x = 0$: on est en présence d'un phénomène d'hystérésis.

Deuxième partie Principe de dilatance de Reynolds

1. Il faut supposer que l'aire "totale occupée par l'objet" se compose de l'aire des 4 disques, plus l'aire de l'interstice entre les disques.

a) Il n'est pas difficile de se convaincre que cette dernière est égale à l'aire du losange, moins celle de quatre secteurs circulaires dont la somme des angles vaut 2π . On obtient donc finalement l'aire du losange, plus celle de 3 disques :

$$S_t = \frac{L_v L_h}{2} - 3\pi R^2$$

b) Le théorème de Pythagore appliqué à l'un des 4 triangles composant le losange donne :

$$\left(\frac{L_v}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_h}{2}\right)^2 = (2R)^2$$

On en déduit : $L_v = 4R \sqrt{1 - \left(\frac{L_h}{4R}\right)^2}$ donc $\Delta S_t = \frac{L_v L_h}{2} = 2L_h R \sqrt{1 - \left(\frac{L_h}{4R}\right)^2}$

c) La valeur minimale de L_h est $2R$, lorsque les deux disques situés sur l'axe horizontal sont au contact. De même, L_h est maximum lorsque L_v vaut $2R$, ce qui correspond à $L_h = 2R\sqrt{3}$.

En posant $x = \frac{L_h}{2R}$ et $y = \frac{\Delta S_t}{4R^2}$, la relation du b) s'écrit : $y = x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Le graphe de cette fonction est dessiné

ci-contre : x varie de 1 à $\sqrt{3}$, et pour ces deux valeurs $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour $x = \sqrt{2}$, y est maximum et vaut 1.

d) Lorsque $x \in [1, \sqrt{2}]$, y est une fonction croissante de x : une augmentation de la contrainte f_v augmente L_h (donc x) et y (donc ΔS_t) : le matériau suit le principe de dilatance de Reynolds. En revanche, si $x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$, une augmentation de f_v fait diminuer ΔS_t et le matériau a le comportement d'un solide ordinaire.

2. Soit N le module de l'action de contact (normale, puisque sans frottements) entre deux disques.

L'équilibre du disque supérieur s'écrit : $f_v = 2N \sin \theta$.

Celui du disque de droite s'écrit : $f_h = 2N \cos \theta$.

On a bien une relation du type $f_h = K f_v$ avec $K = \cotan \theta$

$$K = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$$

Application numérique :

3. Le disque supérieur est soumis, après suppression de la contrainte f_v , aux seules actions de contact des disques voisins, soit deux actions normales N et deux forces de frottement tangentielles T . (Les forces de frottement sont égales en norme pour assurer la nullité du moment au centre du disque, et les actions normales sont égales en norme pour assurer la nullité de la résultante suivant Ox .)

Il reste à assurer la nullité de la résultante suivant l'axe vertical ; il suffit pour cela que $N \sin \theta - T \cos \theta = 0$, soit $T = N \tan \theta$. Cette condition sera compatible avec la loi de Coulomb pour le frottement de glissement si :

$$\tan \theta \leq \mu_s$$

Le système reste alors bloqué dans cette position, par un effet d'*arc-boutement*. Le disque de droite est en équilibre si donc f_h fixe la valeur de N et T .

Application numérique : $\theta \leq 42^\circ$ (condition acceptable car θ doit par ailleurs être compris entre 30° et 60°).

Troisième partie Problème du silo : modèle de Janssen-Rayleigh

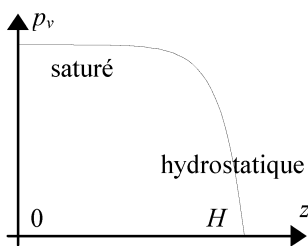
1. Il faut comprendre que le matériau est soutenu en partie par les parois et, comme il est à la limite de glisser vers le bas, les forces tangentielles de la paroi sont vers le haut.

a) On projette les forces sur la verticale ascendante. La tranche est soumise :

- aux contraintes sur ses 2 faces horizontales de résultante $(p_v(z) - p_v(z + dz)) \frac{\pi D^2}{4}$
- aux frottements sur la paroi verticale de résultante $\mu_s p_h \pi D dz$ avec $p_h = K p_v$
- à son poids $-\rho g \frac{\pi D^2}{4} dz$

La condition d'équilibre conduit alors (par passage à la limite $dz \rightarrow 0$) à l'équation $\frac{dp_v}{dz} - \frac{p_v}{\lambda} + \rho g = 0$ avec $\lambda = \frac{D}{4K\mu_s}$. A.N. $\lambda = 4,2 \text{ m}$ (faible devant la hauteur usuelle d'un silo)

b) La solution générale de l'équation différentielle précédente est $p_v = \rho g \lambda (1 - A e^{(z-H)/\lambda})$. La constante d'intégration A vaut 1 si on suppose que le haut du silo est à l'air libre (donc $p_v(H) = 0$).



c) λ est de l'ordre de D donc est petit devant H . On peut distinguer deux zones.

- Les points éloignés de la surface (c'est à dire $H - z$ grand devant λ). Alors $p_v \approx \rho g \lambda$. Il y a saturation de la contrainte à une valeur constante qui permet l'équilibre de chaque couche sous la seule action du frottement (arc-boutement sur la paroi) qui compense exactement le poids.
- Les points proches de la surface (c'est à dire $H - z$ petit devant λ). Alors $p_v \approx \rho g (H - z)$. Cette partie du milieu se comporte comme un fluide ("pression hydrostatique", l'effet d'arc-boutement est négligeable car p_v et p_h sont faibles).

d) La force verticale sur le fond (ou poids apparent) est (en module) $\frac{\pi D^2}{4} p_v(0) = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \lambda (1 - e^{-H/\lambda})$ donc $\frac{\text{Poids}_{\text{apparent}}}{mg} = \frac{\lambda}{H} (1 - e^{-H/\lambda})$ qui est toujours inférieur à 1 voire même très petit devant 1 si $H \gg \lambda$ (cf. 3.b).

2. Dans le référentiel lié au récipient, le matériau subit un champ de pesanteur apparent $(\Gamma - 1)g \vec{e}_z$. Donc, tant que Γ est inférieur à 1, ce champ est toujours vers le bas, moins intense qu'à 1. et rien ne peut se passer. Par contre, si Γ devient supérieur à 1, ce champ est vers le haut et une partie de l'empilement peut décoller (ou plutôt glisser le long) de la paroi. Dans la suite, on ne s'intéresse donc qu'au cas $\Gamma > 1$. À la limite du décollement, qui se produirait vers le haut, les forces de frottement de la paroi seront alors vers le bas.

a) Une tranche ne peut glisser vers le haut que si les couches supérieures lui "laissent la place" et donc si elles décollent également.

b) Plus une tranche est haute, plus $p_{v \text{ statique}}$ (et donc p_h - voir c)) est faible. L'effet d'arc-boutement est alors moins élevé. Donc, si une tranche est à la limite du décollement, les tranches supérieures décollent et n'exercent donc plus de contrainte verticale.

Par ailleurs, les tranches inférieures ayant un arc-boutement plus efficace, n'ont pas besoin de "s'appuyer" sur la tranche considéré pour éviter de glisser vers le haut et donc n'exercent pas de contrainte verticale non plus.

Alors $dF_p + dm(\Gamma - 1)g = 0$. (On vérifie que pour $\Gamma > 1$, dF_p est < 0 donc vers le bas)

c) Dans la partie qui ne décolle pas, les positions ne changent pas et donc la façon dont les grains sont "écrasés" (légère déformation élastique éventuelle) non plus. Les contraintes horizontales liées à ces déformations élastiques ne sont donc pas modifiées. (voir la question II 3.)

À la limite du glissement, $dF_p = -\mu_s K p_{v \text{ statique}} \pi D dz$; d'autre part $dm = \rho \frac{\pi D^2}{4} dz$. La condition d'équilibre du b) conduit alors à $p_{v \text{ statique}} = \lambda \rho g (\Gamma - 1)$.

Remarque : on peut obtenir directement cette relation en utilisant l'équation différentielle du 1.a) dans laquelle on élimine le terme dp_v/dz car il n'y a plus de contraintes verticales et on remplace g par le champ de pesanteur apparent $g(\Gamma - 1)$.

En utilisant l'expression de $p_v(z)$ du 1.b) on obtient la condition $z = H + \lambda \ln(2 - \Gamma)$.

d) La valeur de z trouvée ci-dessus doit être comprise entre 0 et H donc $\Gamma \in [\Gamma_{\min}, \Gamma_{\text{dec}}] = [1, 2 - e^{-H/\lambda}]$. Γ_{dec} vaut pratiquement 2 si H est grand devant λ .

e) L'accélération du récipient présente des oscillations sinusoïdales d'amplitude $4\pi^2 \nu^2 A$. Si cette amplitude dépasse $\Gamma_{\min}$, la partie supérieure du contenu va décoller (le décollement a le plus de chance de se produire lorsque l'accélération est la plus forte vers le bas donc quand le récipient est proche du sommet de sa trajectoire. Tout

l'empilement peut décoller si $4\pi^2 \nu^2 A > g\Gamma_{\text{dec}}$ donc si $A > A_m = \frac{g\Gamma_{\text{dec}}}{4\pi^2 \nu^2}$. A.N. $A_m = 5,5 \text{ cm}$

3. Comme on suppose que $\mu_d = \mu_s$ et que p_h garde la valeur statique, la force de frottement est la même lorsqu'une tranche glisse que lorsqu'elle ne glisse pas tout en étant à la limite du glissement.

a) On peut alors utiliser les résultats des questions 2.b) et début du 2.c) à la seule différence que la force de frottement est maintenant vers le haut donc il faut changer le signe dans l'expression de dF_p en fonction de $p_{v \text{ statique}}$. On obtient

donc $p_{v \text{ statique}} = -\lambda \rho g (\Gamma - 1)$ d'où $\Gamma = \exp\left(\frac{z - H}{\lambda}\right)$. Les tranches supérieures auraient une accélération vers le bas plus grande que celles qui sont en dessous et les rattraperaient donc si l'empilement tendait à ne pas rester compact. L'état "empilement compact" semble stable.

b) Au 1.d) le maintien de l'équilibre correspondait à la condition $F_{\text{paroi}} + \text{Poids}_{\text{apparent}} = mg$. Or, tout comme au 3.a), F_{paroi} n'a pas changé. L'équation du mouvement est donc (en projection sur la verticale descendante) :

$$mg\Gamma_{ch} = mg - F_{\text{paroi}} \quad \text{c'est à dire} \quad mg\Gamma_{ch} = \text{Poids}_{\text{apparent}} \quad \text{d'où} \quad \Gamma_{ch} = \frac{\text{Poids}_{\text{apparent}}}{mg} = \frac{\lambda}{H} \left(1 - \exp\left(-\frac{H}{\lambda}\right) \right)$$

Si on pose $X = H / \lambda$, $\Gamma_{ch} = \frac{1 - e^{-X}}{X} = -\frac{e^{-0} - e^{-X}}{0 - X}$ qui s'interprète graphiquement comme l'opposé de la pente de la corde qui relie les points d'abscisse 0 et X sur le graphe de la fonction $X \rightarrow e^{-X}$. Or cette pente est fonction monotone croissante de X par convexité de la fonction exponentielle.

Si $H/\lambda \ll 1$, $\Gamma_{ch} \approx 1$. Il n'y a aucun effet d'arc-boutement. L'empilement se comporte comme un fluide non visqueux en chute libre.

Si $H/\lambda \gg 1$, Γ_{ch} est pratiquement nul. En effet, la plupart des tranches étaient en régime saturé où les forces de frottement suffisaient à maintenir les couches à l'équilibre sans avoir besoin de faire intervenir les contraintes verticales. Escamoter le fond du récipient n'aurait aucune conséquence s'il n'y avait pas les couches supérieures.

c) La fracture ne se refermera pas si l'accélération de la partie supérieure ($\Gamma_{ch}(H - H_f)$) est plus petite que celle de la partie inférieure ($\Gamma_{ch}(H_f)$) donc, compte tenu du caractère décroissant de la fonction, si $H - H_f$ est plus grand que H_f , c'est à dire si $H_f < H / 2$.