

|                                                                                   |                                                                   |                       |                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------------|
|  | <b>Pruebas de Acceso a la<br/>Universidad<br/>Castilla y León</b> | <b>MATEMÁTICAS II</b> | <b>EJERCICIO</b><br><br><b>N.º Páginas: 2</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------------|

**INDICACIONES**

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de CUATRO PROBLEMAS: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando bolígrafo azul o negro (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}, \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro  $m$ , indicando el número de soluciones en cada caso. (1,5 puntos)

**Resolución**

Las matrices de coeficientes y ampliada son  $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 2 & m & 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 1 & 2 & m & 1 & m & 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = m^2 + 10 + 4 - 5m - 2m - 4 = m^2 - 7m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7 \pm 3}{2}, m = 5, m = 2$$

– Si  $m \neq 5$  y  $m \neq 2$ ,  $\det A \neq 0$ ,  $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$  de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si  $m = 5$ ,  $\det A = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Como  $|5 \ 2 \ 2 \ 5| = 21 \neq 0$ ,  $\text{rg } A = 2$

$$A^* = (5 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 5 \ 1 \ 5 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1) \quad f_2 - f_1 \quad f_3 = f_1 \quad (5 \ 2 \ 1 \ 1 \ - \ 3 \ 3 \ 0 \ 4). \text{ Como } |1 \ 1 \ 0 \ 4| = 4 \neq 0, \operatorname{rg} A^* = 2.$$

Luego,  $\operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A = 2 < n^\circ$  de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

$$\text{-- Si } m = 2, A^* = (2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1) \quad f_2 - f_1 \quad (2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1)$$

La 2ª fila corresponde a la ecuación  $0 = 1$ , que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para  $m = 3$ . (1 punto)

#### Resolución

Si  $m = 3$ , sabemos que el sistema tiene solución única. Hallémosla por Gauss: La matriz del sistema es  $(3 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 5 \ 2 \ 1 \ 1) \quad f_2 - f_1 \quad f_3 - f_1 \quad (3 \ 2 \ 1 \ 1 \ - \ 1 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0)$  y corresponde al sistema  $\{3x + 2y + z = 1 \quad -x + y = 2 \quad 2x = 0$

$$x = 0; \quad y = 2 + x = 2 + 0 = 2; \quad z = 1 - 3x - 2y = 1 - 0 - 4 = -3; \text{ Solución: } x = 0, y = 2, z = -3$$

Problema 1B. Se consideran las matrices  $A = (1 \ 1 \ - \ 1 \ - \ 1)$ ,  $B = (0 \ 1)$ ,  $N = (2 \ 2 \ 2 \ 1)$  y  $C = (2 \ - \ 2 \ - \ 2 \ 2 \ 4 \ 4)$

a) Calcular la matriz  $M = A^t A - B B^t$ , donde  $A^t$  y  $B^t$  representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. (1 punto)

#### Resolución

Sustituyendo

$$M = (1 \ - \ 1 \ 1 \ - \ 1)(1 \ 1 \ - \ 1 \ - \ 1) - (0 \ 1)(0 \ 1) = (2 \ 2 \ 2 \ 2) - (0 \ 0 \ 0 \ 1) \Rightarrow M = (2 \ 2 \ 2 \ 1)$$

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad  $XN = C$ . (1,5 puntos)

#### Resolución

$$\text{Como } \det N = -2 \neq 0, \text{ existe } N^{-1} = \frac{1}{\det N} (\operatorname{adj} N^t) = \frac{1}{-2} \operatorname{adj}(2 \ 2 \ 2 \ 1) = \frac{-1}{2} (1 \ - \ 2 \ - \ 2 \ 2)$$

Multiplicando por  $N^{-1}$ , por la derecha,  $XNN^{-1} = XI = X = CN^{-1}$

$$X = (2 \ - \ 2 \ - \ 2 \ 2 \ 4 \ 4) \frac{-1}{2} (1 \ - \ 2 \ - \ 2 \ 2) = \frac{-1}{2} (6 \ - \ 8 \ - \ 6 \ 8 \ - \ 4 \ 0) \Rightarrow X = (- \ 3 \ 4 \ 3 \ - \ 4 \ 2 \ 0)$$

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2. Se considera la función  $f(x) = 2xe^{-2x^2}$

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. (1,5 puntos)

#### Resolución

Observamos que  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x(-4x)e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2}(1 - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

Hagamos una tabla de signos de  $f'(x)$ :

|         |                           |                |                               |               |                          |
|---------|---------------------------|----------------|-------------------------------|---------------|--------------------------|
|         | $(-\infty, -\frac{1}{2})$ | $-\frac{1}{2}$ | $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ | $\frac{1}{2}$ | $(\frac{1}{2}, +\infty)$ |
| $f'(x)$ | -                         | 0              | +                             | 0             | -                        |
| $f(x)$  | decreciente               | mínimo         | creciente                     | máximo        | decreciente              |

$f$  es decreciente en

$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$  y creciente en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

mínimo relativo:  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})e^{-2(-\frac{1}{2})^2} = -e^{-\frac{1}{2}}$  punto  $(-\frac{1}{2}, -e^{-\frac{1}{2}})$

máximo relativo:  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})e^{-2(\frac{1}{2})^2} = e^{-\frac{1}{2}}$  punto  $(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$

Asíntotas verticales no hay porque  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$

$f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = 0$  porque la exponencial es un infinito de orden superior a  $2x$ .

Luego,  $f$  tiene asíntota horizontal en  $\pm\infty$ , A.H:  $y = 0$  (eje X)

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función  $f$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[0, 2]$ . (1 punto)

**Resolución**

Como  $f(x) = 2xe^{-2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = f(0) = 20e^{-2 \cdot 0^2} = 0$ , la gráfica de  $f$  sólo corta el eje X en  $(0, 0)$

El área que se pide es  $A = \int_0^2 f(x)dx$ . Como  $f(x) = \frac{-1}{2}(-4xe^{-2x^2})$  una primitiva de  $f$  es  $F(x) = \frac{-e^{-2x^2}}{2}$

Por la regla de Barrow,  $A = F(2) - F(0) = \frac{-e^{-2 \cdot 2^2}}{2} - \frac{-e^{-2 \cdot 0^2}}{2} = \frac{1 - e^{-8}}{2} \cong 0,4998 u^2$

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A. Sean las rectas  $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$  y  $s: x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$

a) Comprobar que las rectas  $r$  y  $s$  se cortan para cualquier valor de  $m$ . (1,5 puntos)

**Resolución**

La recta  $r$  pasa por  $A(0, 1, 0)$  y un vector director es  $\vec{d}_r = (4, -2, 2) // (2, -1, 1)$

La recta  $s$  pasa por  $B(1, m, 3)$  y tiene de vector director  $\vec{d}_s = (1, m-1, 3)$

Observamos que  $r$  y  $s$  no son paralelas para ningún valor de  $a$  porque si lo fuesen  $\vec{d}_r // \vec{d}_s$  y

entonces  $\frac{1}{2} = \frac{m-1}{-1} = \frac{3}{1}$  (imposible).

Además,  $\det(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \vec{AB}) = |2 \ -1 \ 1 \ 1 \ m-1 \ 3 \ 1 \ m-1 \ 3| = 0$  porque tiene iguales la 2ª y 3ª fila.

Luego,  $r$  y  $s$  se cortan para cualquier valor de  $m$

b) Para  $m = 6$  hallar el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$ . (1 punto)

**Resolución**

Para  $m = 6$ ,  $r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$  y  $s: x - 1 = \frac{y-6}{5} = \frac{z-3}{3}$

La recta  $r$  pasa por  $A(0, 1, 0)$  y un vector director es  $\vec{d}_r = (4, -2, 2) // (2, -1, 1) \Rightarrow$

$r: \{x = 2k \ y = 1 - k \ z = k$

La recta  $s$  pasa por  $B(1, 6, 3)$  y un vector director es  $\vec{d}_s = (1, 5, 3) \Rightarrow$

$s: \{x = 1 + k' \ y = 6 + 5k' \ z = 3 + 3k'$

Hallamos el punto de intersección igualando las componentes:

$\{2k = 1 + k' \ 1 - k = 6 + 5k' \ k = 3 + 3k' \Rightarrow \{k' = 2k - 1 \ k + 5k' = -5k - 3k' = 3$

Sustituyendo la 1ª ecuación en las otras dos:

$\{k + 5(2k - 1) = -5k - 3(2k - 1) = 3 \Rightarrow \{11k = 0 \ -5k = 0 \Rightarrow k = 0$  y

$\{x = 2 \cdot 0 \ y = 1 - 0 \ z = 0$

Las rectas se cortan en  $A(0, 1, 0)$

Problema 3B. Se considera el vector  $\vec{u} = (3, -1, 5)$

a) Determinar  $a$  para que el vector  $\vec{t} = (1, a, 0)$  sea perpendicular a  $\vec{u}$ . (0,75 puntos)

**Resolución**  $\vec{t} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$

b) Determinar un vector  $\vec{w}$  perpendicular a  $\vec{u} = (3, -1, 5)$  y  $\vec{v} = (2, 6, 0)$ . (0,75 puntos)

**Resolución**

Un vector  $\vec{w}$  perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-30, 10, 20) //$   
 $(-3, 1, 2)$

c) Dados  $\vec{u} = (3, -1, 5)$ ,  $\vec{v} = (2, 6, 0)$  y  $\vec{w} = (-3, 1, 2)$ . Determinar el volumen del paralelepípedo

definido por los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ . (1 punto)

**Resolución**

$V_{\text{paralelepípedo}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}| = |36 + 10 + 90 + 4|$

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A. Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. (1,25 puntos)

b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. (1,25 puntos)

**Resolución**

$N$  = el día está nublado     $S$  = el día está seco     $A$  = sufrir un accidente.

Según el enunciado,  $p(A/N) = 0,09$      $p(A/S) = 0,005$ ,     $p(S) = 7/10 = 0,7$      $p(N) = 3/10 = 0,3$

a) Pide  $p(N/A)$ , que usando el teorema de Bayes es

$p\left(\frac{N}{A}\right) = \frac{p(A \cap N)}{p(A)} = \frac{p(N) p(A/N)}{p(N) p(A/N) + p(S) p(A/S)} = \frac{0,3 \cdot 0,09}{0,3 \cdot 0,09 + 0,7 \cdot 0,005} = \frac{0,027}{0,0305} \cong 0,8852 = 88,52\%$

b) Se pide  $p(S/A) = 1 - p(N/A) \cong 1 - 0,8852 = 0,1148 = 11,48\%$

Problema 4B. De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

- a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. (0,75 puntos)
- b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. (0,75 puntos)
- c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. (1 punto)

**Resolución**

$R$  = sacar bola roja    $A$  = sacar bola azul. Según el enunciado,  $p(R) = \frac{4}{6}$     $p(A) = \frac{2}{6}$

$R_1$  = la 1ª bola es roja    $A_1$  = la 1ª bola es azul.    $R_2$  = la 2ª bola es roja    $A_2$  = la 2ª bola es azul.

a) Se pide  $p(R_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap R_2) = p(R_1)p(A_2/R_1) + p(A_1)p(R_2/A_1) =$

$$= \frac{4}{6} \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \frac{4}{5} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \cong 0,5333 = 53,33\%$$

b) Nos piden  $p(A_2)$  que por el teorema de probabilidad total es

$$p(A_2) = p(A_1)p(A_2/A_1) + p(R_1)p(A_2/R_1) = \frac{2}{6} \frac{1}{5} + \frac{4}{6} \frac{2}{5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 = 33,33\%$$

c) Pide  $p(R_1/A_2)$ , que usando el teorema de Bayes es

$$p\left(\frac{R_1}{A_2}\right) = \frac{p(R_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(R_1)p(A_2/R_1)}{\frac{10}{30}} = \frac{\frac{4}{6} \frac{2}{5}}{\frac{10}{30}} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{10}{30}} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$$