Chapitre 4
Vecteurs du plan

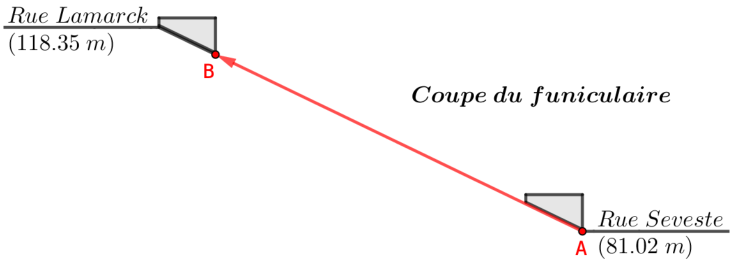
I. Translation et vecteur

Exemple

Le funiculaire de Montmartre a été inauguré en 1900. Il permet de relier le bas de la butte à la basilique du Sacré-Cœur. Le funiculaire se déplace de manière rectiligne sur 108 m en effectuant une **translation** définie par

- la **direction** de la droite (AB) ;
- le **sens** de A vers B en montée, de B vers A en descente ;
- la **longueur** du trajet égale à 108 m.

Si l'on considère la montée, on dit que B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

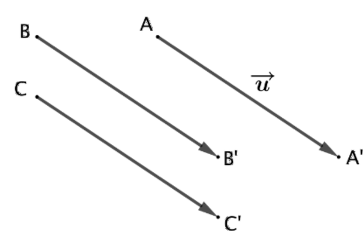


Définition 1

La translation qui transforme le point A en B définit le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ caractérisé par

- Sa **direction,** celle de la droite (AB) ;
- Son **sens,** de A vers B ;
- Sa **norme,** la longueur AB.

Remarques



- Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, A est l'**origine** et B l'**extrémité** du vecteur.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ ou AB.
- On peut noter $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **représentant** de $\vec{u}$. Dans ce cas, la norme de $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Un vecteur ne dépend pas de son représentant. Ainsi, dans la figure ci-contre, les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont des représentants du même vecteur $\vec{u}$.

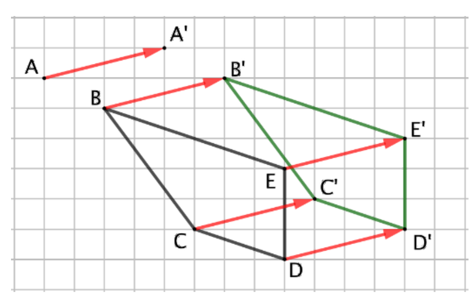
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$$

Méthode

Construire l'image d'une figure par une translation

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk**

Construire l'image $B'C'D'E'$ du trapèze $BCDE$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.



Vecteur vient du latin *vehere* (conduire, transporter). Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.

À l'origine des vecteurs, un italien, **Giusto Bellavitis** (1803-1880) les appelait *segments équipollents*.

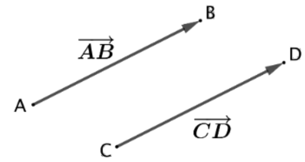
II. Propriété des vecteurs

1. Égalité de vecteurs

Définition 2

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont **même direction**, **même sens** et **même norme**.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Exemple

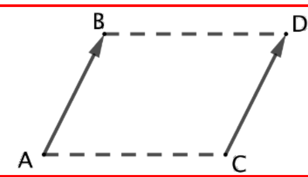
Ci-contre, on peut poser $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

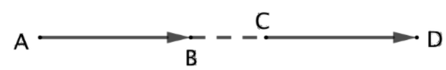
Propriété du parallélogramme

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts. Le quadrilatère $ABDC$ est un **parallélogramme**, éventuellement aplati, si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



Démonstration



- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction. Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.
- Réciproquement, les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, définis à l'aide des segments [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABDC, sont égaux.

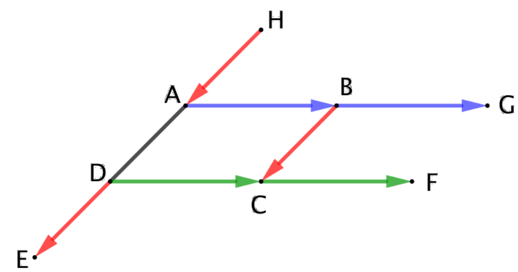
Méthode

Construire un point défini à partir de vecteurs

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/zcQPz4dfnn0**

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



Propriété du milieu

B est le **milieu** du segment [AC] si et seulement si

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

2. Vecteur nul

Définition 3

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

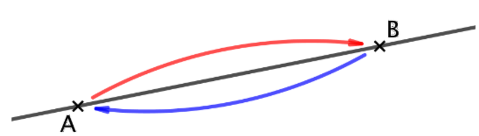
On note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Remarque

Pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

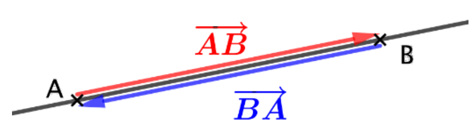
3. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction ! Une droite définit une direction, ci-contre la direction de la droite (AB). Cependant une direction possède deux sens, ici de **A vers B** ou de **B vers A**.



Définition 4

Deux vecteurs sont **opposés** s'ils ont la **même direction**, la **même norme** et s'ils sont de **sens contraire**.



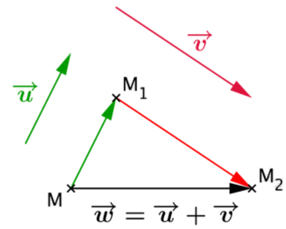
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des **vecteurs opposés**.

On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

III. Somme de vecteurs

1. Définition

Exemple



Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$ et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2

$M \overset{t_1}{\longmapsto} M_1 \overset{t_2}{\longmapsto} M_2$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$

$M \overset{t}{\longmapsto} M_2$

Propriété 1

La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

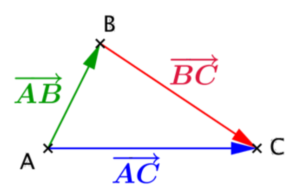
Définition 5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques. On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Une relation fondamentale

Relation de Chasles

Soient 3 points A, B et C du plan. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Remarque

Dans le triangle ABC, on a également les relations.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

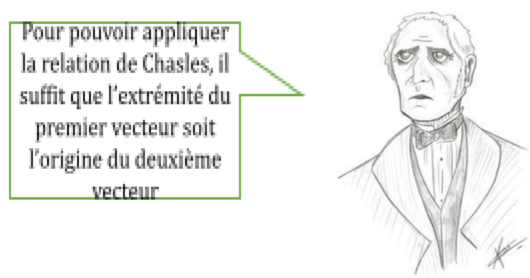
Michel Chasles (France, 1793-1880)

La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs. Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César…) !

Méthode

Appliquer la relation de Chasles

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/fbVrdYiY0qc**



Simplifie les écritures.

a. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ $\qquad$ **b.** $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ $\qquad$ **c.** $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

d. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ $\qquad$ **e.** $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ $\qquad$ **f.** $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

Solution

a. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$ $\qquad$ **b.** $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP}$

c. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{NP}$ $\qquad$ **d.** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

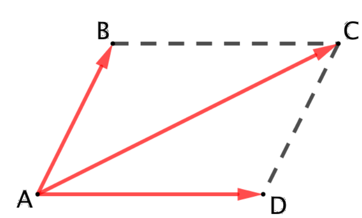
e. $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f. $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

Conséquence

Propriété caractéristique du parallélogramme

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



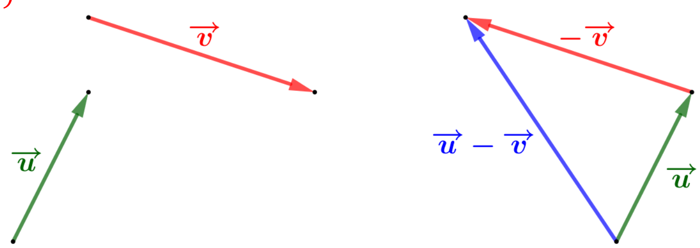
Démonstration

- Supposons que ABCD est un parallélogramme. D'après la relation de Chasles, on peut écrire
$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AD}$$
- Supposons que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$
$$\vec{AB} = \vec{AC} - \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}$$
Donc ABCD est un parallélogramme.

3. Différence de deux vecteurs

Définition 6

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques. On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tel que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



Méthode

Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/nzABUzFM6p8**

Soit un triangle ABC. Construire le point F tel que $\vec{AF} = \vec{BA} + \vec{BC}$

Solution

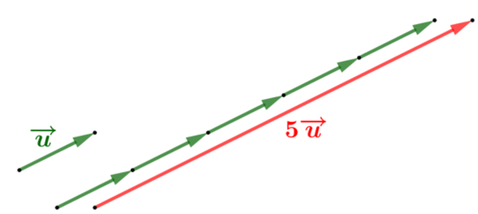
On construit à partir de A (origine de $\vec{AF}$) le vecteur $\vec{BA} + \vec{BC}$ en traçant le vecteur $\vec{BA}$ puis le vecteur $\vec{BC}$ à son extrémité. On a ainsi construit un vecteur $\vec{AF}$ et donc le point F.

IV. Produit d'un vecteur par un réel

1. Définition

Exemple

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur
$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$$



Remarques

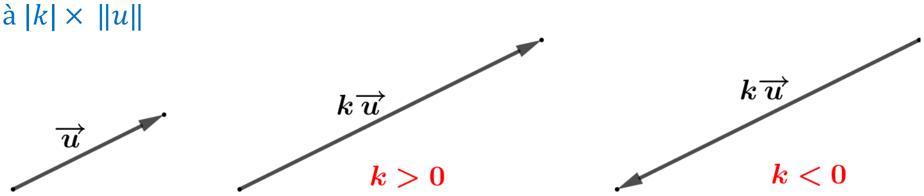
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à $5\|\vec{u}\|$

Définition 7

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.

On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:

- de **même direction** que $\vec{u}$;
- de **même sens** que $\vec{u}$ si $k > 0$, et de **sens contraire** si $k < 0$;
- de norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$

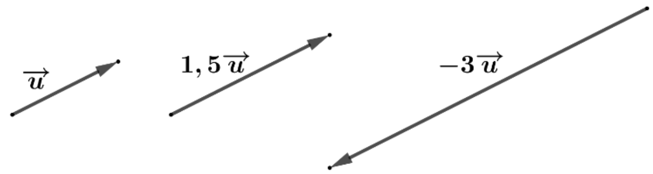


Remarque

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

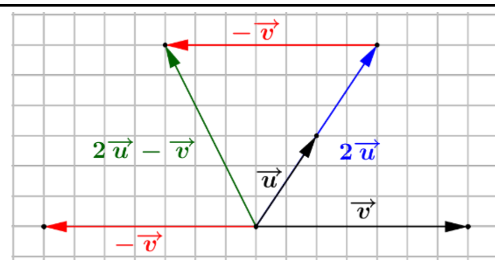
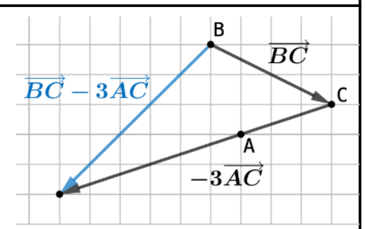
Exemples

Les vecteurs $\vec{u}$, $1,5\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.
$\vec{u}$ et $1,5\vec{u}$ sont de même sens.
$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.
La norme du vecteur $1,5\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.
La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.



Méthode

Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/1C6KEwbO-b8**

Énoncé	Solution
1. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. *Représente les vecteurs $2\vec{u}$, $-\vec{v}$ et $2\vec{u} - \vec{v}$.*	
2. Soit trois points A, B et C du plan. *Représente le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.*	Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + \left(-3\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA}$, on place le vecteur $-3\overrightarrow{AC}$ à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{BC}$. 

Méthode

Construire un point vérifiant une égalité vectorielle
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/JxYpPE6iPEA**

Deuxième propriété du milieu
B est le **milieu** du segment [AC] si et seulement si
$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Preuve

D'après la propriété du milieu, B est le milieu du segment [AC] si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
Or, d'après la relation de Chasles,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Troisième propriété du milieu
B est le **milieu** du segment [AC] si et seulement si, pour tout point M du plan
$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$$

Preuve
Soit M un point du plan, d'après la relation de Chasles,
$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A}$
On retrouve la deuxième propriété du milieu.

2. Colinéarité

Définition 8

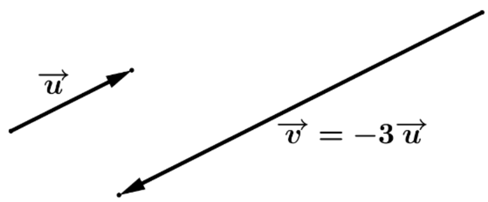
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'ils ont la **même direction**.

Propriété 2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- Un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul
- Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, il existe $k \in R$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$
- Il existe $k \in R$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Exemple
$\vec{v} = -3\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



Méthode
Démontrer que des vecteurs sont colinéaires
🖥️ **Vidéo https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg**
On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Solution
$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{v} = 4\vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{4}{3}\vec{u}$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

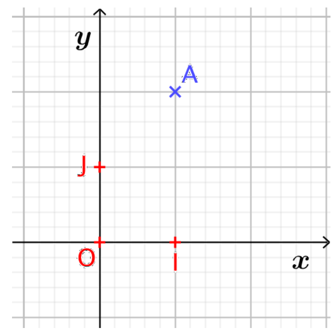
Propriété 3
Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts du plan.

- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.
- Les points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.

Remarques

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, le quadrilatère non croisé dont les sommets sont A, B, C et D est un **trapèze** de bases [AB] et [CD].
- Cela n'indique pas que les points A, B, C et D sont alignés.
- ABDC est un **parallélogramme** uniquement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

V. Coordonnées



Dans un plan, un point est repéré par deux coordonnées, son abscisse x et son ordonnée y. Pour cela, on a défini un repère noté (O, I, J). Le point I indique l'unité de l'axe des abscisses, le point J indique l'unité de l'axe des ordonnées. Le point O désigne le centre du repère et l'origine des droites graduées.

Le couple $(x; y)$ désigne les coordonnées du point dans le repère.

Par exemple, le point A est de coordonnées $(1; 2)$

On note $x_A = 1$ et $y_A = 2$

Milieu d'un segment

Soit un segment [AB] et son milieu I. On peut exprimer les coordonnées de I en fonction des coordonnées de A et B à l'aide des formules suivantes.

$x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$ $\quad$ $y_I = \frac{y_A+y_B}{2}$

Remarque

Cette formule est valable dans **tout type de repère**, contrairement à la formule suivante qui permet de calculer la longueur AB qui n'est valable que dans un **repère orthonormé**, c'est-à-dire un repère où **les axes sont perpendiculaires** et où les **unités** en abscisses et en ordonnées sont **égales** ($OI = OJ$).

Exemples

- $A(1; 2)$ $\quad$ $B(4; 3)$

Soit I le milieu du segment [AB]

$x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = 2,5$ $\quad$ $y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5$

- C(2 ;5) $\quad$ J(1 ;3)

On sait que le point J est le milieu du segment [CD] et on veut connaître les coordonnées de D.

$x_J = \frac{x_C+x_D}{2}$ $\quad$ $y_J = \frac{y_C+y_D}{2}$

$1\times2 = \frac{2+x_D}{2}\times2$ $\quad$ $3\times2 = \frac{5+y_D}{2}\times2$

$2 = 2 + x_D$ $\quad$ $6 = 5 + y_D$

$x_D = 0$ $\quad$ $y_D = 1$

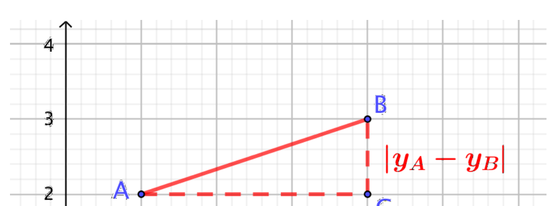
Le point D a pour coordonnées (0 ;1).

Distance entre deux points A et B

Dans un repère **orthonormé**, soient les points $A(x_A\,; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x_{\vec{AB}}^{\ 2} + y_{\vec{AB}}^{\ 2}}$$

Remarque



$x_{\vec{AB}}$ et $y_{\vec{AB}}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ (voir paragraphe suivant).

Preuve

On peut appliquer théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C :

$$AB = \sqrt{|x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple

$A(1; 2)$ $B(4; 3)$

$$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

VI. Coordonnées d'un vecteur

Dans tout le paragraphe, on se place dans un **repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **orthogonaux** (leurs directions sont **perpendiculaires**) et désignent respectivement les **vecteurs unités** de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées. Les **normes** des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **égales**.

Propriété 4

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan, alors $\vec{AB} = \left(x_B - x_A\ y_B - y_A\right)$

Exemple

On considère les points $A(3 ; -1)$ et $B(7 ; -2)$. Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées

$$\vec{AB} = \left(x_B - x_A\ y_B - y_A\right) = (7 - 3\ \ -2 - (-1)) = (4\ \ -1)$$

Propriété 5

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ des points du plan et un vecteur $\vec{u}(x\ y)$. Si le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$ (autrement dit, $\vec{AB} = \vec{u}$) alors

$$B = A + \vec{u} = \left(x_A\ y_A\right) + (x\ y) = \left(x_A + x\ \ y_A + y\right)$$

Soit $x_B = x_A + x$ et $y_B = y_A + y$

Exemple

On considère les points $A(3 ; -1)$ et le vecteur $\vec{u}(4\ \ -1)$. Si B est le translaté de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, alors

$$B = A + \vec{u} = (3\ \ -1) + (4\ \ -1) = (3 + 4\ \ -1 + (-1)) = (7\ \ -2)$$

Propriété 6

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x\ y)$ et $\vec{v}(x'\ y')$

- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\ \ y + y')$
- Si $k \in R$, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\ ky)$

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}(4\ \ -1)$ et $\vec{v}(-3\ 2)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (4 + (-3)\ \ -1 + 2) = (1\ 1)$

$3\vec{u} = 3(4\ \ -1) = (12\ \ -3)$

$-\vec{u} = -(4\ \ -1) = (-4\ 1)$

Remarque

Les coordonnées de $\vec{u}$ et de $-\vec{u}$ sont **opposées**.

VII. Déterminant de deux vecteurs et colinéarité

Définition 9

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée. Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par la formule suivante

$$det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Propriété 7

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et si seulement si $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$.

$det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 4 \times 0,8 - (-3,2) \times (-1) = 3,2 - 3,2 = 0$

On en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (autrement dit, ils ont la même direction).

Remarque

Deux vecteurs **colinéaires** sont :

- **de même sens** si leurs coordonnées respectives sont de **même signe**
- **de sens contraires** si leurs coordonnées respectives sont de **signes contraires**.

Dans l'exemple précédent, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires.

VIII. Applications à la géométrie

1. Déterminer si des droites sont parallèles

On considère les points $E\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix} -1,2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $H\begin{pmatrix} -3,2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Les droites (EF) et (GH) sont-elles parallèles ?

2. Les droites (EH) et (FG) sont-elles parallèles ?

Solution

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{GH}$

$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ -6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{GH} = \begin{pmatrix} -3,2-(-1,2) \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Puis le déterminant de ces deux vecteurs

$det\left(\vec{EF}, \vec{GH}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - (-9) \times (-2) = 18 - 18 = 0$

Le **déterminant** est **nul** donc les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{GH}$ sont **colinéaires**, ce qui équivaut à dire que les droites (EF) et (GH) sont **parallèles**.

$$(EF) \parallel (GH)$$

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{EH}$ et $\vec{FG}$

$\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -3,2-(-2) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -1,2-4 \\ -2-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$det\left(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{FG}\right) = \begin{vmatrix} -1,2 & -5,2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1,2\times4 - (-2)\times(-5,2) = -4,8 - 10,4 = -15,2 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne sont **pas colinéaires**, donc les droites (EH) et (FG) ne sont **pas parallèles**.

$$(EH) \nparallel (FG)$$

Remarque

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont **colinéaires** et de **sens contraires** donc le quadrilatère $EFGH$ est un **trapèze**.

2. Déterminer si des points sont alignés

On considère les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2,5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -0,8 \\ -0,6 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 4 \\ 7,5 \end{pmatrix}$

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

2. Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Solution

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2,5-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -0,8-1 \\ -0,6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8 \\ -3,6 \end{pmatrix}$

$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 1,5 & -1,8 \\ 3 & -3,6 \end{vmatrix} = 1,5\times(-3,6) - 3\times(-1,8) = -5,4 + 5,4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**, donc les droites (AB) et (AC) sont **parallèles** et possèdent un **point commun**. On en déduit que les droites (AB) et (AC) sont **confondues**. Autrement dit, les points A, B et C sont **alignés**.

2. On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 7,5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$

$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1,5 & 3 \\ 3 & 4,5 \end{vmatrix} = 1,5\times4,5 - 3\times3 = -2,25 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont **pas colinéaires**, donc les points A, B et D ne sont **pas alignés**.

3. Déterminer la nature d'un quadrilatère

Dans toute la suite, on suppose que l'on connaît les coordonnées des points A, B, C et D.

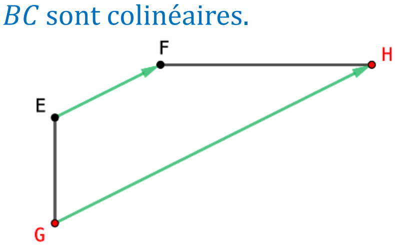
♦ Trapèze

On a vu dans l'exemple du paragraphe 1 que pour montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est un trapèze, il suffit de montrer que soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, soit les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Remarque

Si l'on a montré que deux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont colinéaires :

- Si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de **même sens**, le quadrilatère EF**HG** est un trapèze
- Si $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont de **sens contraires**, le quadrilatère EF**GH** est un trapèze



♦ Parallélogramme

On veut déterminer si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Pour cela, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
- Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Remarque

Dans le premier cas, $ABDC$ est un **quadrilatère croisé**.

♦ Rectangle

On veut déterminer si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle. Le plus simple est de montrer que ABCD est un **parallélogramme** puis de montrer que **ses diagonales sont de même longueur**. On calcule donc les longueurs AC et BD à l'aide de la formule donnée dans le paragraphe I et on vérifie que $AC = BD$.

Remarques

- Si $AC \neq BD$, $ABCD$ ne peut pas être un rectangle.
- Le **produit scalaire** de deux vecteurs permettra l'an prochain de déterminer l'orthogonalité de deux vecteurs, c'est-à-dire de savoir si deux droites sont perpendiculaires.

♦ **Losange**

On veut déterminer si le quadrilatère $ABCD$ est un losange. Le plus simple est de montrer que ABCD est un **parallélogramme** puis de montrer que **deux côtés consécutifs sont de même longueur**. On calcule donc les longueurs AB et BC à l'aide de la formule donnée dans le paragraphe I et on vérifie que $AB = BC$.

Remarque

Si $AB \neq BC$, $ABCD$ ne peut pas être un losange.

♦ **Carré**

On veut déterminer si le quadrilatère $ABCD$ est un carré. Le plus simple est de montrer que ABCD est à la fois un **losange** et un **rectangle**.

Exemple

On considère les points $A(1 \quad -2)$, $B(-1 \quad 1)$, $C(5 \quad 5)$ et $D(7 \quad 2)$

Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Solution

♦ On calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$

$\vec{AB} = (-1-1 \quad 1-(-2)) = (-2 \quad 3)$ $\qquad$ $\vec{DC} = (5-7 \quad 5-2) = (-2 \quad 3)$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ donc $ABCD$ est un **parallélogramme**.

♦ On calcule les longueurs AC et BD.

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

$$BD = \sqrt{(7-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$$

$AC = BD$ donc les diagonales du quadrilatère $ABCD$ sont de même longueur donc $ABCD$ est un **rectangle**.

♦ On calcule les longueurs AB et BC.

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

$AB \neq BC$ donc le quadrilatère $ABCD$ n'est **ni un losange ni un carré**.