

**PROBLEME I - ECOULEMENT LAMINAIRE D'UN FLUIDE CONDUCTEUR
EN PRESENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE**

1. L'équation (1) traduit l'équation locale de mouvement d'une particule fluide- équation de la quantité de mouvement- pour un fluide newtonien incompressible en écoulement permanent dans un champ magnétique . Pour un fluide parfait donc non visqueux ($\eta=0$) on retrouve l'équation d'Euler.

$(\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V}$ est l'accélération convective de la particule. De ce fait - $\rho (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V}$ correspond aux forces d'inertie volumique agissant sur le fluide dans son référentiel propre.

$-\text{grad}p$ correspond à l'équivalent volumique des forces de pression correspondant aux contraintes normales.

$\eta D\vec{V}$ représente les forces de viscosité .

$\vec{J} \times \vec{B}$ est la force volumique électromagnétique.

L'équation (2) $\text{div}\vec{V}=0$ est la condition locale d'incompressibilité du fluide.

L'équation (3) $\text{div}\vec{B}=0$ traduit le fait que le champ magnétique est à flux conservatif.

L'équation (4) $\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B})$ donne la densité de courant volumique dans un conducteur ohmique.

L'équation (5) $\text{rot}\vec{B} = \mu\vec{J}$ est l'équation locale de MAXWELL-AMPERE qui, en régime permanent traduit le théorème d'AMPERE.

2. $\vec{V} = V_x(z)\vec{x}$ vérifie $\text{div}\vec{V}=0$

$\vec{B} = B_x(z)\vec{x} + B_{0z}\vec{z}$ vérifie également $\text{div}\vec{B}=0$ et conduit avec $\vec{E} = E_y\vec{y}$ conduit à $\vec{J} = \sigma (E_y - V_x(z) B_0)\vec{y}$ expression compatible avec l'équation (5) $\text{rot}\vec{B} = \frac{\mu B_x}{\mu_0} \vec{y} = \mu\vec{J}$ et avec l'équation de la quantité de mouvement (1).

Dans cette équation $\vec{J} \times \vec{B} = J_y B_{0x} - J_x B_{0z}$ avec $J_y = \sigma (E_y - B_0 V_x(z))$.

3. Si $\vec{V} = V_x(z)\vec{x}$, l'accélération convective est nulle: $(\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{V} = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$ et $\eta D\vec{V} = \eta \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \vec{x}$. L'équation (1)

fournit par projection sur les axes Ox et Oz :

L'équation
pour $z = \text{cte}$

(1bis) montre que $\frac{\partial p}{\partial z} = f(z)$ est une fonction de z uniquement et ne dépend pas de x donc p est une fonction affine de x :

$$p(x,z) = x f(z) + p(0,z)$$

4. L'équation (1bis) fournit, avec $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$, l'équation

différentielle vérifiée par $V_x(z)$:

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} - \frac{s}{h} B_0^2 V_x(z) = \frac{dp}{hL} - \frac{s}{h} B_0 E_y$$

En

introduisant la grandeur sans dimension $\alpha = B_0 a \sqrt{\frac{s}{h}}$ l'équation différentielle précédente se réécrit:

Cette équation admet

$\mu \sinh(\alpha z/a)$. Or pour éviter

CCP-PC-PHYSIQUE 2 - Mai 1999

viscosité, les composantes tangentielles des vitesses du fluide et de la paroi solide doivent être égales. Les parois étant immobiles dans le référentiel d'étude V_x vérifie les conditions aux limites $V_x(a) = V_x(-a) = 0$. D'où l'expression de la vitesse $V_x(z)$:

$$0 = V_1 + \lambda \operatorname{ch}(\alpha) + \mu \operatorname{sh}(\alpha) \text{ et } 0 = V_1 + \lambda \operatorname{ch}(\alpha) - \mu \operatorname{sh}(\alpha)$$

$$\Rightarrow V_x = V_1 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\frac{\alpha}{a} z)}{\operatorname{ch}(\alpha)} \right). \text{ Soit}$$

5. La vitesse moyenne V_0 dans le canal de section $S = 2aL$ est définie à partir du débit volumique :

$$Dv = 4abV_0 = 2b \int_{-a}^{+a} V_x(z) dz = 2bV_1 \int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\frac{\alpha}{a} z)}{\operatorname{ch}(\alpha)} \right) dz =$$

$$V_1 \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\alpha)}{\alpha} \right)$$

d'où

et

$$V_0 = V_1$$

$$= \frac{1}{L} B_0 (E_y - V_x(z))$$

$$V_x(z) =$$

$$V_x(z)$$

de α

de α ,

th α #

On peut réécrire l'expression de $V_x(z)$:

est maximale en $z=0$ (pour une valeur donnée, sa dérivée est proportionnelle à

$-\operatorname{sh}(\alpha z/a)$). Pour des valeurs très faibles

$V_x(0)$ tend vers 1,5 (On utilise les développements limités de $\operatorname{ch} \alpha \approx 1 + \alpha^2/2$ et

$\alpha - \alpha^3/3$). Enfin , on remarque que, pour $\alpha \gg 1$, $V_x(0) \approx (1 - 1/\alpha)^{-1}$. Ainsi, pour

deux valeurs α_1 et α_2 telles que $\alpha \gg 1$, si $\alpha_2 > \alpha_1$ alors $(1 - 1/\alpha_2)^{-1} < (1 - 1/\alpha_1)^{-1}$.

Le maximum étant plus faible, la conservation du débit entraîne un élargissement de la courbe d'où l'allure des courbes ci-dessus (obtenues ici à l'aide du logiciel Mapple, mais qui peuvent être tracées qualitativement à partir de l'étude précédente).

En champ faible (B_0 faible donc α faible) le profil de l'écoulement se rapproche du profil parabolique de l'écoulement de POISEUILLE(avec en $z=0$: $V(0) = V_{\max} = 1,5V_0$). Pour des champs magnétiques élevés, le profil de l'écoulement devient très vite celui d'un écoulement quasi uniforme à la vitesse $V = V_0$.

6. La densité de courant est donné par l'expression établie à la question 2 précédente: $J_y = \sigma (E_y - B_0 V_x(z)) = J_y J_y(z)$

.Le courant qui traverse l'électrode de section $S = 2aL$ est le flux de $\vec{J}$ à travers cette section soit, compte tenu de

$$\text{l'expression de } J_y \quad I = \iint_{\vec{J}} d\vec{S} = \sigma L \int_{-a}^{+a} \{ E_y - B_0 V_0 \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\frac{\alpha}{a} z)}{\operatorname{ch}(\alpha)} \right) / \left(1 - \frac{\operatorname{th}(\alpha)}{\alpha} \right) \} dz .$$

On obtient:

$$I = 2aL \sigma (E_y - B_0 V_0)$$

On distingue trois

type de fonctionnement du dispositif:

a) Si $E_y < B_0 V_0$, $I < 0$ le champ magnétique B_0 crée un courant qui peut alimenter une charge extérieure. Le système constitue un générateur magnétohydrodynamique.

a) Si $E_y > B_0 V_0$, $I > 0$ le champ magnétique B_0 agit sur le courant I pour créer un gradient de pression dans la direction de l'écoulement Ox susceptible de mettre en mouvement le fluide. Le système fonctionne comme une pompe électromagnétique.

b) Si $E_y = B_0 V_0$, $I = 0$. Connaissant la valeur du champ B_0 qui annule le courant I , la mesure de la différence de potentiel entre les deux électrodes distantes de $2b$ permet de remonter à la valeur du champ électrique régnant entre ces électrodes et donc à la valeur de V_0 . Le dispositif permet donc une mesure du débit et fonctionne en débitmètre.

7. L'équation de Maxwell-Ampère permet de remonter au champ magnétique créé par les courants c'est-à-dire à la

$$\text{composante } B_x : \frac{\nabla_x \cdot \vec{y}}{\nabla_z} = \mu \vec{J} = \mu \sigma (E_y - V_x(z) B_0) \vec{y} \Rightarrow B_x =$$

$$\mu \sigma \int (E_y - V_x(z) B_0) dz . \text{ Le plan}$$

$$B_x = \mu \sigma \int (E_y - V_x(z) B_0) dz$$

$z = 0$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant donc le $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan et on a donc $B_x(0) = 0$. Après intégration et compte tenu de la condition précédente on obtient l'expression :

8. En considérant $V_x = 0$ on obtient $\vec{J} = \sigma E_{yy} \vec{y} = J_{0y} \vec{y}$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma B_0 E_y = J_0 B_0 \Rightarrow \boxed{p_0 = J_0 B_0 x + p(0)}$$

$dp = \sigma L B_0 (E_y - \frac{B_0 V_0}{1 - \frac{v^2}{c^2}})$. Pour α élevé et V_0 faible (pompe

électromagnétique) on obtient

PROBLEME II - FREINAGE PAR COURANTS DE FOUCAULT

1. 1.1 $B_x = \sum_{n=1}^{\infty} B_{x,max}^{(n)}(x) \sin(\frac{2pn}{\lambda} z)$ vérifie $\Delta B_x = 0$ d'où

De même

$B_z = \sum_{n=1}^{\infty} B_{z,max}^{(n)}(x) \cos(\frac{2pn}{\lambda} z)$ vérifie $\Delta B_z = 0$ d'où

1.2 $B_{x,max}^{(n)}(x)$ est une fonction paire de x , on retiendra

$B_{z,max}^{(n)}(x)$ est une fonction impaire de x , on retiendra

2. Le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif d'où $\text{div} \vec{B} = 0$ soit $\frac{\partial B_x}{\partial x} +$

On obtient donc la condition $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2pn}{\lambda} [A_n \text{sh}(\frac{2pn}{\lambda} x) \sin(\frac{2pn}{\lambda} z) - A'_n \text{sh}(\frac{2pn}{\lambda} x) \cos(\frac{2pn}{\lambda} z)] = 0$, $A_n = A'_n$

$\forall x$ et $\forall z$ ce qui implique

3. En mécanique newtonienne le principe de relativité de Galilée conserve le champ magnétique dans un changement de référentiel. Le champ magnétique dans (R') est identique au champ magnétique dans (R). La composante B_x est la composante transverse, normale à la plaque et à son vecteur vitesse $\vec{V} = V \vec{u}_z$, responsable du freinage par courant de Foucault. La composante B_z est la composante longitudinale, parallèle au vecteur vitesse de la plaque.

4. Dans la plaque le champ magnétique $\vec{B}$ induit un champ électrique

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B}_x(x, z)$$

D'où l'apparition d'un courant induit dans la plaque de densité volumique $\vec{j}$ en l'absence de tout autre champ électrique

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \vec{V} \times \vec{B}_x(x, z)$$

Le vecteur densité de force volumique de Laplace $\vec{f}_L$ agissant sur la

plaque a pour

expression $\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B}$ d'où ses deux composantes non nulles sur Ox et Oz :

$$\boxed{f_{Lx} = \sigma V B_x(x, z) B_z(x, z)}$$

et

$$\boxed{f_{Lz} = -\sigma V B_x^2(x, z)}$$

5. Sur le domaine D d'épaisseur 2Δ , de largeur l et de longueur 2λ , on calcule les composantes F_x et F_z de la force magnétique à partir des densités précédentes.

$$F_x = \iiint_V f_{Lx} dx = \sigma V \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} \text{ch}(\frac{2pn}{\lambda} x) \text{sh}(\frac{2pm}{\lambda} x) dx \int_0^l dy \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin(\frac{2pn}{\lambda} z) \cos(\frac{2pm}{\lambda} z) dz$$

Or $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin(\frac{2pn}{\lambda} z) \cos(\frac{2pm}{\lambda} z) dz = 0$, $\forall n$ et $\forall m$. La force transverse sur la plaque est nulle:

$$\boxed{F_x = 0}$$

La force longitudinale se calcule à partir de la densité de force f_{Lz}

$$F_z = \iiint f_L z dx = -\sigma V \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} ch\left(\frac{2pn}{\lambda}x\right) ch\left(\frac{2pm}{\lambda}x\right) dx \int_0^{+1} dy \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2pn}{\lambda}z\right) \sin\left(\frac{2pm}{\lambda}z\right) dz$$

Or $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2pn}{\lambda}z\right) \sin\left(\frac{2pm}{\lambda}z\right) dz = 0$ si $n \neq m$ et $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin^2\left(\frac{2pn}{\lambda}z\right) dz = \frac{\lambda}{2}, \forall n$.

Avec $\int_0^1 dy = 1$ et $\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} ch^2\left(\frac{2pn}{\lambda}x\right) dx = \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} \frac{1+ch\left(\frac{4pn}{\lambda}x\right)}{2} dx = \frac{D}{2} + \frac{\lambda}{4pn} sh\left(\frac{2pnD}{\lambda}\right)$.

D'où l'expression de la force de freinage s'exerçant sur le domaine D de la plaque (F_z par unité de largeur de la plaque si $l = 1$ mètre):

$$P_f = F_z V$$

$$F_z = -$$

La puissance de cette force de freinage est

6. Par définition la puissance volumique dissipée par effet Joule est $p_j = \sigma E^2$ d'où la puissance dissipée par effet Joule dans le domaine D de la plaque

$$P_j = \iiint p_j dt = \sigma V^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} ch\left(\frac{2pn}{\lambda}x\right) ch\left(\frac{2pm}{\lambda}x\right) dx \int_0^{+1} dy \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \sin\left(\frac{2pn}{\lambda}z\right) \sin\left(\frac{2pm}{\lambda}z\right) dz.$$

Soit

$$P_j =$$

$$P_j + P_f = 0$$

7. On remarque que

Il y a conservation de l'énergie. La puissance de la force de freinage est dissipée par effet Joule.

8. La décomposition en série de Fourier de la fonction créneau $B_x(\Delta/2, z)$ s'écrit:

$$B_x(\Delta/2, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n ch\left(\frac{pnD}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{2pn}{\lambda}z\right) \quad \text{avec} \quad A_n ch\left(\frac{pnD}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} Bx\left(\frac{D}{2}, z\right) dz$$

Compte tenu de l'expression de $B_x(\Delta/2, z)$ on obtient:

$$n = 2p \quad A_{2p} = 0;$$

$$n = 2p+1 \quad A_{2p+1} = (-1)^p \left(\frac{2B_0 \sqrt{2}}{(2p+1)p ch\left(\frac{(2p+1)pD}{\lambda}\right)} \right).$$

Dans le cas où $\lambda = 4a$ et $\Delta/4a = \Delta/\lambda \ll 1$ on obtient $sh\left(\frac{2pD}{\lambda}\right) \approx \frac{2pD}{\lambda}$ et $ch\left(\frac{pD}{\lambda}\right) \approx 1$

$$\text{d'où} \quad A_1 = \left(\frac{2B_0 \sqrt{2}}{p} \right)$$

et le premier terme de la force de freinage :

$$F_z = \sum_{n=1}^{\infty} F_{n_x} \quad \text{avec}$$

$$F_z = -$$