

Concours commun MINES-PONTS 1997

MATH 2 (option PSI)

1ère partie :

1°) a- On trace un arc de cercle de centre A et de rayon AM qui recoupe le segment AB au point J puis un arc de cercle de centre B de rayon BJ qui recoupe le demi-cercle de diamètre AB au point N .

On connaît l'équation polaire d'un cercle centré sur l'axe polaire, passant par le pôle: $\rho = 2R \cos J$. On en déduit $AM = \cos J$ d'où $AH = \cos^2 J$. De même $BN = \cos j$ et $BK = \cos^2 j$. De plus, $AM + BN = \cos J + \cos j = 1$. Alors $AI = \frac{AH+AK}{2} = \frac{\cos^2 J + [1-(1-\cos J)^2]}{2} = \cos J = AM$ et les points I et J coïncident.

b- Les calculs de a- prouvent que $AI_n = \sqrt{AH_n}$ d'où $x_{n+1} = 2\sqrt{x_n - x_n}$. Remarquons que $BM_{n+1} = 1 - AM_n = AB - AM_n < BM_n$ ce qui prouve que M_{n+1} est situé sur l'arc BM_n donc que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. De plus, elle est majorée par 1, donc convergente. Sa limite l doit vérifier $l = 2\sqrt{l} - l$ (et $l > 0$) d'où $l = 1$.

Il en résulte que $AI_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \rightarrow +\infty$ et donc que la série de premier terme AI_1 et de terme général $I_{n-1}I_n$ converge et a pour somme 1.

2°) Si la série $\sum c_n$ converge, le point $x = 1$ fait partie du domaine de convergence. Donc le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Puisque $c_n > 0$, la série $\sum c_n x^n$ est normalement convergente sur $[0,1]$ (donc uniformément) et sa somme est continue

sur $[0,1]$, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ ce qui est le résultat demandé.

2ème partie :

1°) a- Pour $a_n = \{, b_1 = 1 \text{ et } b_2 = 1$. Supposons que $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 1$. Alors

$$b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} = a_1 b_{n-1} = 1.$$

Donc $b_n = 1$ pour tout $n > 0$. Les rayons de convergence sont $R_1 = +\infty$ et $R_2 = 1$. Les sommes sont $A(x) = x$ et $B(x) = \frac{x}{1-x}$.

b- $b_1 = a_1^3$ et $a_1 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$. Supposons que pour tout $k \leq n+1$, $0 \leq b_k \leq 1$; alors

$$b_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq 1.$$

Puisque $0 \leq a_n \leq 1$ et $0 \leq b_n \leq 1$, les rayons de convergence R_1 et R_2 sont au moins égaux à 1.

c- La relation de récurrence donne $b_n x^n = a_n x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right) x^n$ d'où, pour $|x| < 1$,

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \right) x^n$. On reconnaît le produit de Cauchy de deux séries entières de rayons de convergence au moins égaux à 1, d'où $B(x) = A(x) + A(x)B(x)$ et $B(x) = \frac{A(x)}{1-A(x)}$.

Lorsque $xx \rightarrow 1$, $A(x) \rightarrow 1^-$ d'après I 2°); donc $B(x) \rightarrow +\infty$. Le rayon R_2 est donc exactement égal à 1.

d- $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-\alpha) \alpha^{n-1} x^n = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x}$ avec un rayon de convergence $R_1 = 1/\alpha$. D'où

$$B(x) = \frac{(1-\alpha)x}{1-\alpha x} \frac{1-\alpha x}{1-x} = (1-\alpha) \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad b_n = 1 - \alpha n^3 \mathbb{1}\{.$$

2°) a- Pour $|x| < 1$, $|A(x)| < \sum_{n=1}^p |a_n| = 1$. Donc les racines de E sont de module supérieur ou égal à 1.

$A'(1) = \sum_{n=1}^p n a_n > \sum_{n=1}^p a_n$ (strictement puisque $a_p > 0$). Donc $A'(1) > 0$ ce qui prouve que x_1 est racine simple.

Pour $|x| = 1$, $|A(x)| \leq \sum_{n=1}^p |a_n| = 1$, et l'on ne peut avoir égalité que si les complexes x_n correspondants aux coefficients non nuls a_n sont de même argument. L'argument de $A(x)$ est alors l'argument commun à ces complexes x_n qui doit donc être nul (modulo $2p$) si $A(x) = 1$. Comme en particulier a_1 n'est pas nul, x doit être réel positif, donc égal à 1.

b- $B(x) = \frac{A(x)}{1-A(x)} = -\frac{A(x)}{\prod_{n=1}^p (x-x_n)}$. Puisque les racines sont simples, la décomposition de $B(x)$ en éléments simples

s'écrit $B(x) = -1 + \sum_{n=1}^p \frac{\alpha_n}{x-x_n}$ avec $\alpha_n = -\frac{A(x_n)}{A'(x_n)}$. En développant chaque fraction élémentaire en série entière, on obtient

$$\frac{\alpha_n}{x-x_n} = -\frac{\alpha_n}{x_n} \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{x_n}\right)^q, \text{ d'où } b_q = \sum_{n=1}^p \frac{A(x_n)}{x_n^{q+1} A'(x_n)} q^3 1 \} \{. \text{ Pour}$$

$$n > 1, |x_n| > 1; \text{ donc } b_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^p \frac{A(x_n)}{A'(x_n)} = \frac{1}{A'(1)}.$$

3ème partie :

1°) a- Pour $a_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-\alpha)\alpha^{k-1} = \alpha^k$. D'où $R_3 = \frac{1}{\alpha}$ et $R(x) = \frac{1}{1-\alpha x}$.

b- Puisque les a_n sont positifs ou nuls, il en est de même des r_n . De plus, $r_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 1$ d'où $R_3 \leq 1$.

c- Comme $a_n = r_{n-1} - r_n$, $A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} r_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} r_n x^n = (x-1)R(x) + r_0$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

$$\text{D'où } R(x) = \frac{A(x)-1}{x-1}.$$

2°) a- En tout point $x > 0$ tel que la série $\sum M x^n$ converge, la série $\sum u_n x^n$ converge. Donc $p^3 1$.

b- Fixons $e > 0$. Il existe un rang n_0 tel que $n^3 r_{\text{Sub}\{size\ 8\{0\}\}} \leq l r_{\text{Sub}\{size\ 8\{n\}\}} - l r_{\text{line}} \leq \{e\} \backslash \{2\}$. D'où

$$\left| U(x) - \frac{l}{1-x} \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{n_0-1} (u_n - l)x^n \right| + \sum_{n=n_0}^{+\infty} e 2x^n \left| \sum_{n=1}^{n_0-1} (u_n - l)x^n \right| + \frac{e}{2(1-x)} x \in [0, 1[\} \{ \text{ et}$$

$$|(1-x)U(x) - l| \leq (1-x) \sum_{n=1}^{n_0-1} |u_n - l| x^n + e 2(1-x)(n_0-1)(M+l).$$

On peut alors trouver $x_0 \in]0, 1[$ tel que $x \in [x_0, 1[\} \{$, $(1-x)(n_0-1)(M+l)e 2$, d'où $|(1-x)U(x) - l| < e$ $x \in [x_0, 1[\} \{$. Ceci prouve que $(1-x)U(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ ou encore que $U(x) \sim \frac{l}{1-x}$ au voisinage de 1.

3°) a- On a montré dans **I 1°) c** que $B(x) = A(x) + A(x) B(x)$ d'où $A(x) - 1 = -\frac{1}{B(x)+1}$. Comme $B(x)$ est équivalent au voisinage à gauche de 1 à $\frac{l}{1-x}$ (d'après **2°)**), on obtient $A(x) - 1 \sim -\frac{x-1}{l}$.

b- On déduit alors de **1°)** que $R(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ $x < 1$. Puisque $r_n \geq 0$ pour tout n , on en tire d'une part $R(x) \leq 1$ $x \in [0, 1[\} \{$, puis $\sum_{k=0}^n r_k x^k \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et enfin $\sum_{k=0}^n r_k \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en faisant tendre

x vers 1. Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série $\sum r_k$ converge et, d'après **I 2°)**, $S_3 = 1$