Chapitre A8
Équations

Activité préparatoire

Voici 4 problèmes :

1. Je pense à un nombre, je le multiplie par 3, j'ajoute 4 au résultat. J'obtiens 13. *Quel est ce nombre ?*

2. Je pense à un nombre, je le multiplie par 4, j'ajoute 3 au résultat. J'obtiens 9. *Quel est ce nombre ?*

3. Je pense à un nombre, je le multiplie par 3 et j'ajoute 7. J'obtiens le même résultat que si je le multiplie par 9 et que j'ajoute 5. *Quel est ce nombre ?*

4. Je pense à un nombre, je le multiplie par 3,2 et j'ajoute 0,7. J'obtiens le même résultat que si je le multiplie par 0,8 et que j'ajoute 5,5. *Quel est ce nombre ?*

Solution

Pour le premier problème, on dispose de **deux méthodes** : soit en testant des valeurs jusqu'à trouver la bonne, soit en partant du résultat final et en effectuant les opérations inverses.

$$(13 - 4) : 3 = 9 : 3 = 3$$

Pour le deuxième problème, la deuxième méthode semble plus adaptée : $(9 - 3) : 4 = 6 : 4 = 1,5$

Pour le troisième problème, aucune de ces méthodes ne fonctionne. Appelons x le nombre cherché. Le problème se traduit par l'égalité (équation) suivante :

$$3x + 7 = 9x + 5$$

Pour résoudre cette équation, on essaye d'isoler x en ajoutant, en soustrayant, en multipliant ou en divisant chaque membre par un même nombre :

$$3x + 7 - 9x = 9x + 5 - 9x - 6x + 7 - 7 = 5 - 7\frac{-6x}{-6} = \frac{-2}{-6}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Le nombre cherché est $\frac{1}{3}$.

En effet, $3\times\frac{1}{3} + 7 = 9\times\frac{1}{3} + 5 = 8$

Pour le quatrième problème, appelons x le nombre cherché. Le problème se traduit par l'égalité (équation) suivante :

$$3,2x + 0,7 = 0,8x + 5,5$$

$$3,2x + 0,7 - 0,8x = 0,8x + 5,5 - 0,8x 2,4x + 0,7 - 0,7 = 5,5 - 0,7\frac{2,4x}{2,4} = \frac{4,8}{2,4}$$

$$x = 2$$

Le nombre cherché est 2.

En effet, $3,2\times 2 + 0,7 = 0,8\times 2 + 5,5$

I. Définitions

Une **équation** est une égalité où au moins un des nombres est désigné par une lettre. Ces nombres écrits en lettres sont les **inconnues** de cette équation. Résoudre une équation, c'est **trouver toutes les valeurs des inconnues** pour lesquelles l'égalité est vérifiée.

Par exemple, l'équation $3x + 5 = x - 2$ a pour **inconnue** x. Dans cette équation, $3x + 5$ est le **membre de gauche** et $x - 2$ est le **membre de droite**.

On dit qu'un nombre est une **solution** de l'équation s'il vérifie l'égalité.

Par exemple, $x = 2$ est la **solution** de l'équation $3x + 5 = 11$.
Une **équation du premier degré à une inconnue** est une équation qui **peut** se mettre sous la forme $ax + b = 0$ où a et b sont des **constantes** et x est une **inconnue**.
Une équation du premier degré à une inconnue peut avoir soit **1 solution** soit **aucune solution** soit une **infinité de solutions**.

Exemples
- L'équation $x + 2 = 0$ admet une solution $x =- 2$.
- L'équation $0x = 2$ n'a pas de solution. Aucun nombre ne vérifie cette égalité.
- L'équation $x = x + 1$ n'a pas de solution car **aucun nombre n'est égal à son suivant**.
- L'équation $x = x$ possède une infinité de solutions : tous les nombres vérifient l'égalité.

Une telle équation est aussi appelée une **identité**.
- L'équation $3(x + 2) = 3x + 6$ est une identité. Tous les nombres vérifient cette égalité.
- L'équation $x + 2 = 5$ admet une solution $x = 3$.

Pour résoudre une telle équation, on **isole les termes** contenant l'**inconnue** d'un côté et les **constantes** de l'autre en utilisant la règle suivante :

Règle
Soit a, b et c des nombres réels, on peut affirmer :
- $a = b$ si $a + c = b + c$
- $a = b$ si $a - c = b - c$
- $a = b$ si $a\times c = b\times c$ et si $c\neq 0$
- $a = b$ si $a : c = b : c$ et si $c\neq 0$

Remarque
$5\times 0 = 3\times 0$ et pourtant $5\neq 3$

Exemple 1
On veut résoudre l'équation suivante :

$$5x + 2 = 3x - 8$$

Solution $5x + 2 - 3x = 3x - 8 - 3x 2x + 2 - 2 =- 8 - 2 \frac{2x}{2} = \frac{-10}{2} x =- 5$

Vérification
D'une part, $5x + 2 = 5\times(- 5) + 2 =- 25 + 2 =- 23$
D'autre part, $3x - 8 = 3\times(- 5) - 8 =- 15 - 8 =- 23$
L'équation admet une solution $x =- 5$.

Exemple 2
On veut résoudre l'équation suivante :

$$- 3x - 7 = 4x + 5$$

Solution $- 3x - 7 + 3x = 4x + 5 + 3x - 7 - 5 = 7x + 5 - 5 \frac{-12}{7} = \frac{7x}{7} x =- \frac{12}{7}$

Vérification

D'une part, $-3x-7=-3\times\left(-\frac{12}{7}\right)-7=-\frac{13}{7}$

D'autre part, $4x+5=4\times\left(-\frac{12}{7}\right)+5=-\frac{13}{7}$

L'équation admet une solution $x=-\frac{12}{7}$.

Exemple 3

On veut résoudre l'équation suivante :

$$3(x+2)=-2x+7$$

Solution

On développe le membre de **gauche** :

$$3(x+2)=3x+6$$

L'équation est donc équivalente à :

$$3x+6=-2x+73x+6+2x=-2x+7+2x5x+6-6=7-6\frac{5x}{5}=\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}$$

Vérification

D'une part, $3(x+2)=3\left(\frac{1}{5}+2\right)=\frac{33}{5}$

D'autre part, $-2x+7=-2\times\frac{1}{5}+7=\frac{33}{5}$

L'équation admet une solution $x=\frac{1}{5}$.

II. Algébrisation

Pour résoudre un problème nécessitant la résolution d'une équation, on distingue plusieurs étapes :

1. **Choix de l'inconnue :** on désigne par x un nombre de l'énoncé, en général le nombre cherché.
2. **Mise en équation :** on traduit l'énoncé du problème par une équation.
3. **Résolution de l'équation.**
4. **Vérification et réponse au problème.**

Exemple 1

Zouhir et Camille possèdent des bandes dessinées. Camille détient 15 BD de plus que Zouhir. Si elle lui en donne 3, elle a alors deux fois plus de BD que lui.

Combien Zouhir a-t-il de BD ?

Solution

Choix de l'inconnue

Soit x le nombre de BD de Zouhir.

Mise en équation

Le problème se traduit par l'équation suivante :

$x+15$ est le nombre de BD de Camille.

$$x+15-3=2(x+3)$$

Résolution de l'équation

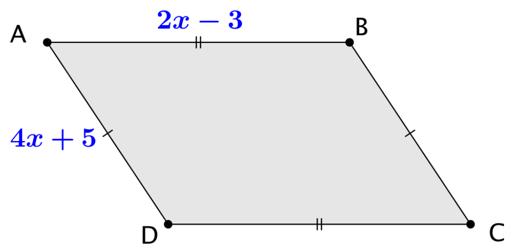
$$x+12-x=2x+6-x12-6=x+6-6x=6$$

Vérification et réponse au problème

Zouhir possède 6 BD et Camille 21. Si Camille en donne 3 à Zouhir, il en aura 9. Cela représente bien la moitié des 18 BD qui restent à Camille.

Exemple 2

Soit x un nombre supérieur ou égal à 2.
Soit un parallélogramme ABCD tel que $AB = 2x - 3$ et $AD = 4x + 5$.
ABCD peut-il être un losange ?



Solution

Mise en équation

Le parallélogramme ABCD est un losange si $AB = AD$. Le problème se traduit donc par l'équation suivante :

$$2x - 3 = 4x + 5$$

Résolution de l'équation

$$2x - 3 - 2x = 4x + 5 - 2x$$

$$-3 - 5 = 2x + 5 - 5$$

$$\frac{-8}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$x = -4$$

Vérification et réponse au problème

$$AB = 2x - 3 = 2\times(-4) - 3 = -8 - 3 = -11$$

Une longueur ne peut être négative donc ABCD ne peut pas être un losange.

Exemple 3

Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. *Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?*

Solution

Choix de l'inconnue

Soit x le nombre d'années pour que l'âge de Pierre soit le double de celui de Marc.

Mise en équation

Le problème se traduit par l'équation suivante :

$$26 + x = 2(11 + x)$$

Résolution de l'équation

$$26 + x - x = 22 + 2x - x 26 - 22 = x + 22 - 22 x = 4$$

Vérification et réponse au problème

Dans 4 ans, Marc aura 15 ans et Pierre 30 ans, soit le double de l'âge de Marc.