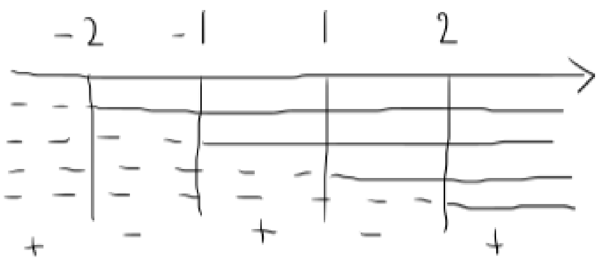
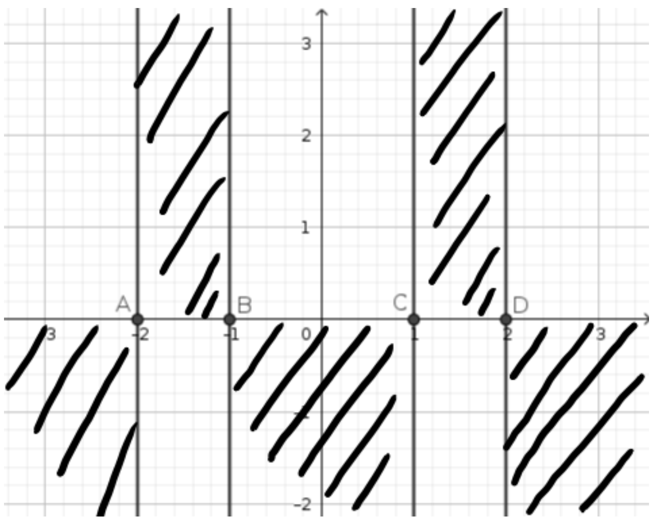
Studiare la funzione y = $x^4 - 5x^2 + 4$.
Si tratta di una curva algebrica di 4° grado (quartica).
Vediamo i singoli passi dello studio
1. Dominio: si tratta di una funzione polinomiale, dunque Dominio = $\mathbb{R}$.
2. Ricerca degli zeri della funzione, ovvero soluzione dell'equazione $x^4-5x^2+4=0$.
Si potrebbe la variabile ausiliaria $t=x^2$. L'equazione diventa $t^2-5t+4=0$.

$$t_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot4}}{2}$$

le due soluzioni sono quindi $x^2 = 4$; $x^2 = 1$; e vi sono quattro zeri:
x = -2; x = -1; x = +1; x = +2.
3. Studio del segno della funzione, ovvero soluzione della disequazione
$x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.
Utilizzando il risultato appena ottenuto la disequazione si può scrivere: $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)>0$
e quindi si ha il seguente andamento del segno qui riportato.



Si eliminino nel piano cartesiano le parti di piano non interessate dal grafico della funzione.

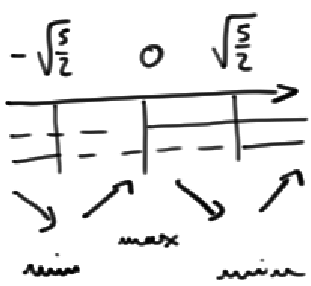


4. Osserviamo che la funzione è pari.
Infatti $f(-x)=(-x)^4-5(-x)^2+4=f(x)$. In questo modo eviteremo qualche calcoli per trovare le ordinate dei punti stazionari e dei punti di flesso.

5. Calcolo delle derivate
$y'=4x^3-10x$
$y''=12x^2$

6. Ricerca dei massimi, dei minimi. Si tratta di risolvere l'equazione f'(x) = 0, in questo caso $4x^3-10x=0$ raccogliendo $2x$ si ha:
$2x(2x^2-5)=0$ e dunque si hanno le tre soluzioni
$x_1=0$

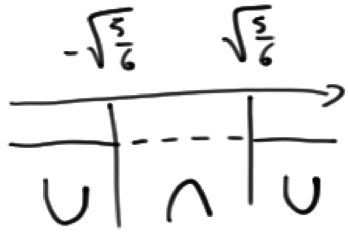
$$x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$$



Calcolando le ordinate (y) di questi tre punti si trovano i tre punti stazionari:
f(0)=4

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\cdot\frac{5}{2}+4=-\frac{9}{4}$$

Si osservi il grafico del segno della derivata prima qui a lato.
6. Ricerca dei flessi e concavità.
Si tratta di risolvere l'equazione f"(x)= 0, in questo caso $12x^2 - 10 = 0$ che ha le due soluzioni:



$x=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$, con $y=\left(\frac{5}{6}\right)^2-5\cdot\frac{5}{6}+4=\frac{19}{36}$.

Vi sono quindi due punti di flesso: $F_{1,2}=\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\frac{19}{36}\right)$.

Per la concavità si studia il segno della derivata seconda, i cui risultati sono scritti qui a lato.

Riassumendo tutti questi risultati si ottiene il grafico riportato qui sotto.