

ECOLE POLYTECHNIQUE
Physique 2 PC

Première partie

1) a) On compare les courants de déplacement $\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ aux courants de conduction $\sigma \vec{E}$: ils sont bien négligeables : $\frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \approx 5.10^{-9} \ll 1$; on a donc $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$ (1)

1) b) Avec $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on obtient, en prenant le rotationnel de (1) : $\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (2) dans chacun des deux domaines.

2) a) En utilisant la coordonnée orthoradiale de (2), à l'aide du formulaire, on a :

$$\Delta B_\theta(r, z, t) - \frac{1}{r^2} B_\theta(r, z, t) = \mu_0 \sigma \frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad (3) ; \text{ avec } B_\theta(r, z, t) = \underline{B}_\theta(r) \exp i(\omega t - kz), \quad (3) \text{ devient :}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \underline{B}_\theta}{\partial r} \right) - k^2 \underline{B}_\theta - \frac{1}{r^2} \underline{B}_\theta = i \mu_0 \sigma \omega \underline{B}_\theta \Leftrightarrow$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \underline{B}_\theta}{\partial r^2} + r \frac{\partial \underline{B}_\theta}{\partial r} - ((k^2 + i \mu_0 \sigma \omega) r^2 + 1) \underline{B}_\theta = 0 \Leftrightarrow r^2 \frac{\partial^2 \underline{B}_\theta}{\partial r^2} + r \frac{\partial \underline{B}_\theta}{\partial r} - (k'^2 r^2 + 1) \underline{B}_\theta = 0 \quad (4)$$

2) b) Mais $k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \approx 4.10^7 \gg \mu_0 \sigma \omega \approx 2.10^{-3} \text{ (SI)} \Rightarrow k'^2 \approx k^2$

2) c) Cela revient à poser $\sigma = 0$ dans l'équation de Maxwell-Ampère, donc à négliger la conduction dans l'axoplasme.

2) d) Posons la variable sans dimension $x = kr$; dans l'équation (4), $\frac{\partial}{\partial r} = k \frac{d}{dx}$ et (4) se réécrit :

$$x^2 \frac{d^2 \underline{B}_\theta}{dx^2} + x \frac{d \underline{B}_\theta}{dx} - (x^2 + 1) \underline{B}_\theta = 0$$

(5) Les solutions de cette équation différentielle sont

présentées dans le formulaire ($n=1$) , soit : $\underline{B}_\theta(x) = \alpha I_1(x) + \beta K_1(x)$, les coefficients α et β étant à préciser dans chacun des deux domaines :

□ dans l'axoplasme (milieu (1), $r < a$) , le champ magnétique doit rester borné en $r = 0$; la fonction K_1 divergeant en $r = 0$, on doit y avoir $\beta = 0$. Par ailleurs, le théorème d'Ampère (qui peut s'appliquer ici puisqu'on se trouve dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires) donne sa valeur en $r = a$:

$$2\pi a \underline{B}_\theta(r = a^-) \cdot \exp i(\omega t - kz) = \mu_0 i_0 \exp i(\omega t - kz) \Rightarrow \underline{B}_\theta(a^-) = \alpha_1 I_1(ka) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a} \quad . \text{ Donc :}$$

$$\underline{B}_\theta(r < a) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a I_1(ka)} I_1(kr)$$

(6)

□ dans le milieu extérieur (2) ($r > a$), le champ magnétique ne doit pas diverger pour $r \rightarrow \infty$: la fonction I_1 divergeant en l'infini, le coefficient α doit donc y être nul. De plus, le champ magnétique

doit être continu en $r = a$, car la membrane lipidique séparant les deux milieux ne conduit pas de

courants surfaciques. Donc : $\underline{B}_\theta(a^-) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a} = \underline{B}_\theta(a^+) = \beta_2 K_1(ka)$. D'où :

$$\boxed{\underline{B}_\theta(r > a) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a K_1(ka)} K_1(kr)} \quad (7)$$

3) a) Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle d'axe Oz et de rayon $r \gg a$. On a :

$2\pi r \underline{B}_\theta(r) = 2\pi r \frac{\mu_0 i_0}{2\pi a K_1(ka)} K_1(kr) = \mu_0 i_{\text{enlacé}}$. Or au voisinage de l'infini, $K_1(kr)$ tend vers zéro comme $\exp(-kr)$ et donc $r K_1(kr)$ tend aussi vers zéro, et l'intensité totale enlacée est alors nulle : l'extérieur de l'axoplasme conduit donc un courant de retour opposé à celui circulant à l'intérieur.

3) b) On a, dans l'hypothèse des régimes quasi-permanents :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{B} = \begin{pmatrix} ik \underline{B}_\theta(r) \\ 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \underline{B}_\theta) \end{pmatrix} \exp i(\omega t - kz) = \mu_0 \begin{pmatrix} \underline{j}_r(r) \\ 0 \\ \underline{j}_z(r) \end{pmatrix} \exp i(\omega t - kz) = \mu_0 \sigma \begin{pmatrix} \underline{E}_r(r) \\ 0 \\ \underline{E}_z(r) \end{pmatrix} \exp i(\omega t - kz) \quad (8)$$

Comme on connaît les expressions de $\underline{B}_\theta(r)$, on peut en déduire celles des coordonnées de la densité de courant et du champ électrique en tout point.

- En toute rigueur, on a $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \underline{E} = -\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \text{grad} \psi$. Cependant, $\underline{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \underline{B} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \underline{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \underline{B}) = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \underline{B}$. Mais le calcul du 2) b) a été mené finalement en posant au (5) que $\Delta \underline{B} \approx 0$. D'où $\overrightarrow{\text{rot}} \underline{E} \approx 0 \Rightarrow \underline{E} \approx -\text{grad} \psi$.

4) a) On a : $v(z, t) = \psi_{\text{int}} - \psi_{\text{ext}} = \psi(r = a^-, z, t) - \psi(r = a^+, z, t)$.

Par ailleurs, comme $d\psi = -\underline{E}(M) \cdot d\overrightarrow{M}$, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \psi(a^-, z + dz, t) - \psi(a^-, z, t) = -E_{1z}(a^-, z, t) \cdot dz \quad (9a) \\ \psi(a^+, z + dz, t) - \psi(a^+, z, t) = -E_{2z}(a^+, z, t) \cdot dz \quad (9b) \end{array} \right] \Rightarrow \{(9a) - (9b)\}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial z}(z, t) = E_{2z}(a^+, z, t) - E_{1z}(a^-, z, t)} \quad (9)$$

4) b) (8) donne :

- A l'intérieur :

$$\underline{E}_{1z}(r) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_1} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r \underline{B}_\theta) = \frac{i_0}{2\pi \sigma_1 a I_1(ka)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r I_1(kr)) = \frac{ki_0}{2\pi \sigma_1 a I_1(ka)} \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x I_1(x))$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x I_1) = I_0(x)$$

avec toujours $x = kr$. Le formulaire donne : $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x I_1) = I_0(x)$. Donc :

$$\underline{E}_{1z}(a^-) = \frac{ki_0}{2\pi \sigma_1 a I_1(ka)} I_0(ka) \Rightarrow \underline{E}_{1z}(a^-, z, t) = \frac{k I_0(ka)}{2\pi \sigma_1 a I_1(ka)} i_0 \exp i(\omega t - kz)$$

$$\text{On a donc bien } \underline{E}_{1z}(a^-, z, t) = Z_1 i(z, t) \text{ avec } Z_1 = \frac{k I_0(ka)}{2\pi \sigma_1 a I_1(ka)} \quad (10)$$

- De même, à l'extérieur :

$$\underline{E}_{2z}(r) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \underline{B}_\theta) = \frac{i_0}{2\pi \sigma_2 a K_1(ka)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r K_1(kr)) = \frac{ki_0}{2\pi \sigma_2 a K_1(ka)} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x K_1(x))$$

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x K_1(x)) = -K_0(x)$$

Le formulaire donne :

$$E_{2z}(a^+, z, t) = -\frac{k K_0(ka)}{2\pi \sigma_2 a K_1(ka)} i_0 \exp i(\omega t - kz) = -Z_2 i(z, t)$$

Donc :

avec :

$$Z_2 = \frac{k K_0(ka)}{2\pi \sigma_2 a K_1(ka)} \quad (11)$$

4) c) On a $ka = \frac{2\pi a}{\lambda} \approx 10^{-2}$ dans les conditions proposées. On peut utiliser alors les expressions équivalentes aux fonctions de Bessel au voisinage de 0. Ainsi :

$$I_0(ka) \approx 1 ; I_1(ka) \approx \frac{ka}{2} ; K_0(ka) \approx -\ln(ka) > 0 ; K_1(ka) \approx \frac{1}{ka}$$

On réécrit les expressions de Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{1}{\pi \sigma_1 a^2} \quad (10) \quad \text{et} \quad Z_2 = -\frac{k^2}{2\pi \sigma_2} \ln(ka) > 0 \quad (11)$$

Rem : (10) donne la résistance linéique d'un conducteur cylindrique en régime permanent. Tout ça pour ça...

$$\text{Alors : } \frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\sigma_1}{2\sigma_2} (ka)^2 \ln(ka) \quad . \text{ Mais } ka \rightarrow 0 \text{ donc } (ka)^2 \ln(ka) \rightarrow 0 \text{ et , donc } \frac{Z_2}{Z_1} \ll 1 .$$

$$\text{A.N. : } \underline{Z_1 = 6.10^9 \Omega.m^{-1}}.$$

$$4) d) \text{ Cf (9) : } \frac{\partial v}{\partial z}(z, t) = E_{2z}(a^+, z, t) - E_{1z}(a^-, z, t) = (Z_2 - Z_1) i(z, t) \approx -Z_1 i(z, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(z, t) = -r_a i(z, t) \quad r_a = Z_1 = \frac{1}{\pi \sigma_1 a^2}$$

On a donc bien : (12) où

4) e) Dans ce dernier résultat, toute référence aux caractéristiques de fréquence et de longueur d'onde de l'onde harmonique envisagée a disparu : il n'y a donc pas d'effet dispersif, si bien qu'il est encore valable pour toute onde plane restant bornée se propageant selon Oz ... pourvu que les fréquences de son spectre continuent à vérifier les approximations effectuées, c'est à dire :

$$1) a) : \sigma \gg \varepsilon \omega ; 2) b) : k^2 \gg \mu_0 \sigma \omega ; 4) c) : ka \ll 1 .$$

Deuxième partie

1) Le courant de diffusion du type d'ion considéré est : $\vec{j}_{diff} = n(r) \cdot \vec{v} = -D \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(n)$. La densité de courant électrique associé à cette diffusion est alors : $\vec{j}_D = Ze n(r) \cdot \vec{v} = -Ze D \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(n) = j_D(r) \cdot \vec{e}_r$, purement radial donc car n ne dépend que de r ; le vecteur radial est dirigé de l'axoplasme vers l'extérieur.

$$\text{On a donc : } j_D(r) = -Ze D \frac{dn}{dr}(r) \quad (13)$$

2) On a : $\vec{j}_E = Z e n u_m \vec{E}(r) = j_E(r) \cdot \vec{e}_r$ avec $j_E(r) = Z e n u_m E(r)$ (14)

3) a) A l'équilibre pour ce type d'ion, les deux courants se compensent et donc $j_E(r) + j_D(r) = 0$. Donc :

$$Z e n(r) u_m E(r) - Z e D \frac{dn}{dr}(r) = 0 \text{ avec } D = \frac{u_m k_B T}{Z e} \Rightarrow E(r) = \frac{k_B T}{Z e} \frac{1}{n(r)} \frac{dn}{dr}(r), \text{ soit :}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{k_B T}{Z e} \frac{d}{dr}(\ln(n))(r) \vec{e}_r = -\vec{\text{grad}}\psi \quad \text{d'où} \quad \psi(r) = -\frac{k_B T}{Z e} \ln(n(r)) + cste$$

$$\boxed{\psi(r = a^-) - \psi(r = a^+) = V_i = \frac{k_B T}{Z e} \ln\left(\frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)} \quad \text{d'où} \quad (15)$$

Si on raisonne en termes de statistique de Boltzmann, en admettant que l'énergie potentielle des ions considérés est $Z e \psi_k$ dans le milieu (k) , la probabilité de présence d'un ion dans le milieu (k) à

$$p_k = \alpha \exp\left(-\frac{Z e \psi_k}{k_B T}\right)$$

la température T est : ; le rapport des densités particulières est égal au rapport

$$\frac{p_{ext}}{p_{int}} = \frac{n_{ext}}{n_{int}} = \exp\left[\frac{Z e (\psi_{ext} - \psi_{int})}{k_B T}\right]$$

des probabilités entre l'extérieur et l'intérieur, donc : : on retrouve bien la relation (15).

3) b) A.N. : on trouve $V_{Na} = +59 \text{ mV}$ et $V_K = -83 \text{ mV}$.

4) a) Cf les relations (12) et (13) : les densités de courant ne dépendent que de r . Chaque densité de

courant doit vérifier une équation de conservation du type $\frac{\partial}{\partial t}(Z e n) + \text{div}(\vec{j}_D) = 0$. Mais on se place

en régime permanent, donc $\frac{\partial}{\partial t}(Z e n) = 0 \Rightarrow \text{div}(\vec{j}_D) = \frac{dj_D}{dr} = 0$, et de même pour j_E .

$\vec{j}_i = \vec{j}_{Di} + \vec{j}_{Ei}$ est donc uniforme dans la membrane supposée plane, pour le type d'ion (i).

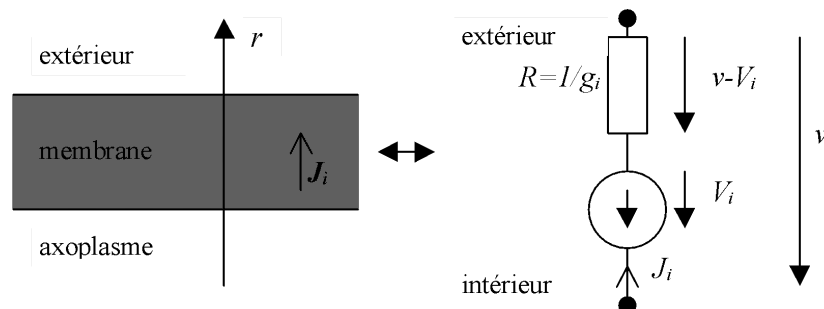
4) b) La densité de courant électrique transportée par les ions de type (i) est :

$$\vec{j}_i = Z_i e [n_i u_{mi} \vec{E} - D_i \vec{\text{grad}}(n_i)] = Z_i e n_i u_{mi} \left(\vec{E} - \frac{k_B T}{Z_i e} \frac{1}{n_i} \vec{\text{grad}}(n_i) \right) = -Z_i e n_i u_{mi} \vec{\text{grad}}\left[\psi + \frac{k_B T}{Z_i e} \ln(n_i)\right]$$

C'est une loi d'Ohm locale, où $Z_i e n_i u_{mi}$ joue le rôle de la conductivité, d'ailleurs non uniforme car n_i varie spatialement ; mais on peut toujours écrire la forme globale, par unité de surface de membrane :

$$j_i = g_i [\psi_{int} - \psi_{ext} + \frac{k_B T}{Z_i e} \ln\left(\frac{n_{int}}{n_{ext}}\right)] = g_i (v - V_i) \quad (16), \text{ d'après (15), où :}$$

(16) peut être décrit par le schéma électrocinétique équivalent (relatif à l'unité de surface de membrane) :



4) c) Les densités de courant de chaque type (i) d'ion s'ajoutent ; d'où la relation suivante (17) :

$$j = \sum_{i=1}^N j_i = \sum_{i=1}^N g_i (v - V_i) = \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) \cdot \left[v - \frac{\sum_{i=1}^N g_i V_i}{\sum_{i=1}^N g_i} \right] = g_m (v - V_E) \quad \text{où} \quad \boxed{g_m = \left(\sum_{i=1}^N g_i \right) \text{ et } V_E = \frac{\sum_{i=1}^N g_i V_i}{\sum_{i=1}^N g_i}}$$

V_E correspond bien au potentiel à l'équilibre car quand $v = V_E$, $j = 0$.

4)d) A l'équilibre, les courants des ions Na^+ et K^+ se compensent. Comme on a :

$$V_E = \frac{g_{\text{Na}} V_{\text{Na}} + g_{\text{K}} V_{\text{K}}}{g_{\text{Na}} + g_{\text{K}}} \Rightarrow \frac{g_{\text{Na}}}{g_{\text{K}}} = \frac{V_E - V_{\text{K}}}{V_{\text{Na}} - V_E} = 0,1$$

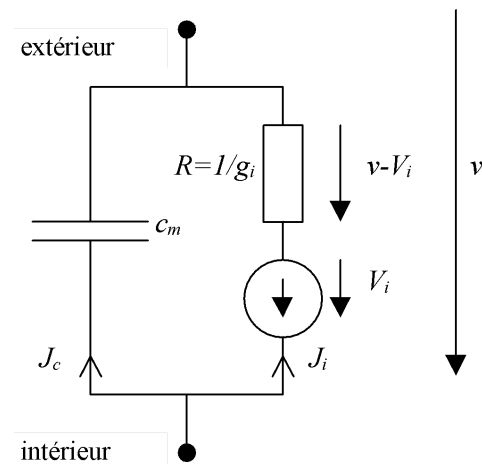
. Les ions potassium ont donc un rôle prépondérant dans la conduction.

5) a) La membrane forme l'isolant diélectrique d'épaisseur δ d'un condensateur plan dont les armatures sont les milieux extrêmes. Par unité de surface de membrane, la capacité est

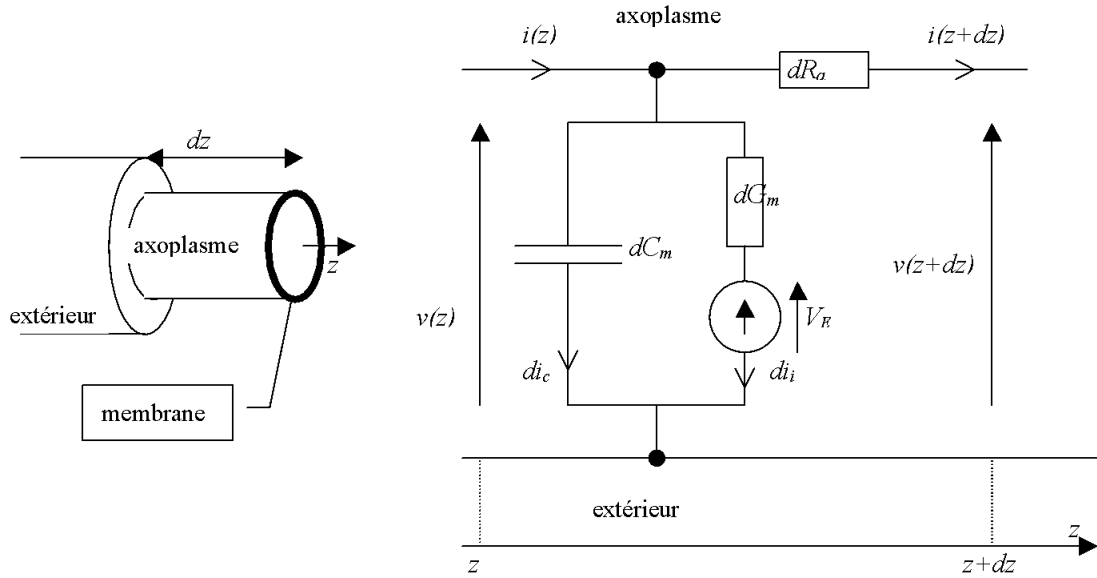
$$c_m = \frac{\epsilon}{\delta} \quad \boxed{\text{(18)}}$$

$$j_c = c_m \frac{dv}{dt} \quad \text{On a :} \quad \text{(19)}$$

5) b) A.N. $c_m = 10 \text{ mF.m}^{-2}$.



Troisième partie



1) a) Une longueur dz d'axone porte une surface de membrane égale à $2\pi a dz$; elle possède (Cf (17) à (19)) une conductance à travers la membrane égale à $dG_m = 2\pi a g_m dz$, une capacité $dC_m = 2\pi a c_m dz$ et, Cf (12), une résistance d'axoplasme $dR_a = r_a dz$.

$$\text{Donc : } \frac{\partial i}{\partial z} = -2\pi a j = -2\pi a [g_m (v(z) - V_E) + c_m \frac{\partial v}{\partial t} (z)] \quad (20)$$

2) Avec (12) : $\frac{\partial v}{\partial z}(z, t) = -r_a i(z, t)$ qu'on dérive par rapport à z , on obtient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z, t) = -r_a \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = 2\pi a r_a [g_m (v(z) - V_E) + c_m \frac{\partial v}{\partial t}(z)] \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi a r_a g_m} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z, t) - \frac{c_m}{g_m} \frac{\partial v}{\partial t}(z, t) - (v(z, t) - V_E) = 0$$

(21), soit la forme proposée, avec :

$$\boxed{\lambda^2 = \frac{1}{2\pi a r_a g_m} \quad \tau = \frac{c_m}{g_m}} \quad (22) \text{ et } (23)$$

3) a) Si l'on s'intéresse aux solutions indépendantes du temps, (21) devient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z, t) - \frac{1}{\lambda^2} (v(z, t) - V_E) = 0 \Rightarrow v(z) = \alpha \exp\left(\frac{z}{\lambda}\right) + \beta \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) + V_E$$

Si l'on s'intéresse aux solutions indépendantes de z , (21) devient :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z, t) + \frac{1}{\tau} (v(z, t) - V_E) = 0 \Rightarrow v(t) = \gamma \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + V_E$$

λ apparaît comme une longueur d'atténuation et τ un temps de relaxation.

A.N. : $\lambda = 8.10^{-4} \text{ m}$ et $\tau = 1 \text{ ms}$.

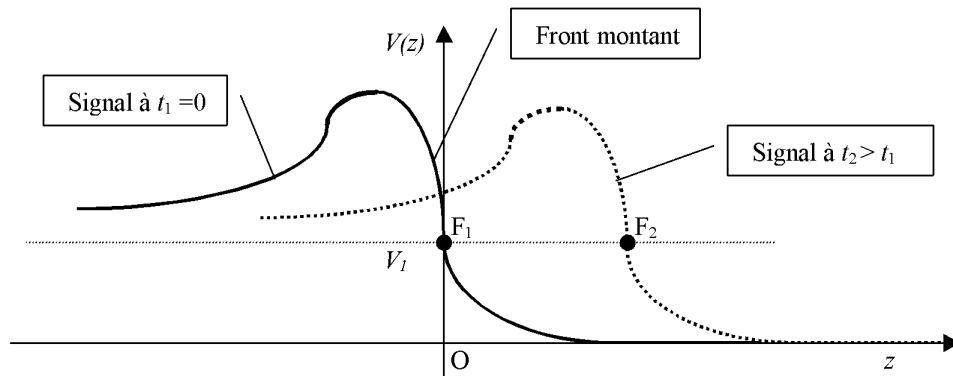
$$4) \text{ Cf (20) : } j = \begin{cases} g_m (v(z) - V_E) + c_m \frac{\partial v}{\partial t}(z) = g_m V + c_m \frac{\partial V}{\partial t}(z) & \text{si } V < V_1 \\ g(v(z) - V_E - V_2) + c_m \frac{\partial v}{\partial t}(z) = g(V - V_2) + c_m \frac{\partial V}{\partial t}(z) & \text{si } V > V_1 \end{cases} \quad (24)$$

5) a) On a toujours $2\pi a j = -\frac{\partial i}{\partial z}$ et (12), donc :

$$-r_a \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(z,t) = \begin{cases} 2\pi a r_a (g_m V + c_m \frac{\partial V}{\partial t}) & \text{si } V < V_1 \\ 2\pi a r_a [g(V - V_2) + c_m \frac{\partial V}{\partial t}] & \text{si } V > V_1 \end{cases} \quad \text{or } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{ds} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -u \frac{d}{ds} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 V}{ds^2} = \begin{cases} 2\pi a r_a (g_m V - u c_m \frac{dV}{ds}) \approx -2\pi a r_a u c_m \frac{dV}{ds} & \text{si } V < V_1 : (25a) \\ 2\pi a r_a [g(V - V_2) - u c_m \frac{dV}{ds}] & \text{si } V > V_1 : (25b) \end{cases}$$

Envisageons deux « photos » du potentiel d'action le long de l'axone à deux dates différentes, $t_1 = 0$ et $t_2 > t_1$ pour un signal se propageant vers les z croissants :



Si l'on considère comme sur la figure que le point F du front montant (où le potentiel d'action V passe par la valeur V_1 en montant) se trouve en $z = 0$ à $t = 0$, on lit immédiatement que l'état $V < V_1$ correspond à $s = z - ut > 0$ et l'état $V > V_1$ correspond à $s < 0$.

5) b) □ si $V < V_1$ alors l'équation (25a) donne :

$$\frac{d^2 V}{ds^2} + 2\pi a r_a u c_m \frac{dV}{ds} = 0 \Rightarrow V(s) = A_1 \exp(-\gamma_1 s) + B_1 \text{ où } \gamma_1 = 2\pi a r_a u c_m \quad (26a)$$

□ si $V > V_1$ alors l'équation (25b) donne :

$$\frac{d^2 V}{ds^2} + 2\pi a r_a u c_m \frac{dV}{ds} - 2\pi a r_a g(V - V_2) = 0 \Rightarrow V(s) = A_2 \exp(ps) + A'_2 \exp(p's) + V_2$$

où p et p' sont les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle (25b). On trouve :

$$p = -\pi a r_a u c_m + \sqrt{(\pi a r_a u c_m)^2 + 2\pi a r_a g} > 0 \text{ et } p' = -\pi a r_a u c_m - \sqrt{(\pi a r_a u c_m)^2 + 2\pi a r_a g} < 0$$

Le cas $V < V_1$ correspond à $s < 0$; il faut éviter la divergence du terme $A'_2 \exp(p's)$ pour $t \rightarrow \infty$: le coefficient A'_2 doit donc être nul, et, en posant $\gamma_2 = p > 0$, on a :

$$V(s) = A_2 \exp(+\gamma_2 s) + V_2 \quad \text{avec } \gamma_2 = -\pi a r_a u c_m + \sqrt{(\pi a r_a u c_m)^2 + 2\pi a r_a g} \quad (26b)$$

Les conditions aux limites donnent :

□ $V \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$ (soit $V < V_1$) $\Rightarrow B_1 = 0$;

□ $V = V_1$ pour $s = 0 \Rightarrow A_1 = V_1$ et $A_2 = V_1 - V_2$. En conclusion :

$$\begin{cases} V < V_1 : V = V_1 \exp(-\gamma_1 s) & : (27a) \\ V > V_1 : V = (V_1 - V_2) \exp(+\gamma_2 s) + V_2 & : (27b) \end{cases}$$

6) La continuité de i en $s = 0$ (c'est à dire en suivant le front montant qui passe par V_1) impose par

l'équation (12) que $\frac{dV}{ds}$ doit être continue en $s = 0$: on a donc d'après les équations (27) :

$$\boxed{\gamma_2(V_2 - V_1) = \gamma_1 V_1} \quad (28)$$

7) L'équation (28) donne :

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V_2 - V_1} = \frac{-\pi a r_a u c_m + \sqrt{(\pi a r_a u c_m)^2 + 2\pi a r_a g}}{2\pi a r_a u c_m} \Rightarrow \frac{V_1 + V_2}{V_2 - V_1} = \sqrt{1 + \frac{2g}{\pi a r_a (u c_m)^2}}$$

Après réarrangement, on obtient bien :

$$\boxed{u^2 = \frac{g}{2\pi a r_a c_m^2} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2}} \quad (29) \text{ qui est l'expression proposée.}$$

Cf (10) : $r_a = Z_1 = \frac{1}{\pi \sigma_1 a^2}$, et comme ni g ni c_m ne dépendent de a , on en déduit que u croît en fonction de a comme $\sqrt{a}$; de plus, avec (18) on peut réécrire (29) :

$$\boxed{u^2 = \frac{g a \sigma_1 \delta^2}{2\varepsilon^2} \frac{(V_2 - V_1)^2}{V_1 V_2}} \quad (30)$$

8) A.N. : $V_2 = 129 \text{ mV}$.

Pour un axone de rayon $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$, on trouve $u = 7 \text{ m.s}^{-1}$;
pour un axone géant de rayon $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$, on trouve $u = 40 \text{ m.s}^{-1}$.