

Physique 1 Electricité – Optique

A) Détermination de quantités spectrales grâce à l'interféromètre de Michelson1) *Source monochromatique idéale.*

1-1) $\delta = 2e \cos i$

1-2) $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi 2e \cos i}{\lambda} ; p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e \cos i}{\lambda}$

1-3) $p_0 = \frac{2e}{\lambda} \quad p_0 \text{ entier} \Rightarrow \text{maximum d'intensité au centre}$

1-4) $p = p_0 \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow p_0 - p = p_0 \frac{i^2}{2} = m \Rightarrow i = \sqrt{m} \sqrt{\frac{\lambda}{e}}$
m représente le n° des anneaux brillants

1-5) $i \propto \frac{r}{f'} \Rightarrow r_m = \sqrt{m} f' \sqrt{\frac{\lambda}{e}}$

2) *Source monochromatique réelle.*

2-1) $E = \frac{E_0}{2} [1 + \cos(2\pi 2e \sigma \cos i)] = \frac{E_0}{2} [1 + \cos(2\pi 2e \sigma)]$ au centre, soit ici

$$E = C \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} e^{j2\pi\sigma 2e} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} e^{-j2\pi\sigma 2e} d\sigma \right]$$

$u = \sigma - \sigma_0 ; du = d\sigma ;$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\varepsilon^2}} du = I(0) = \varepsilon \sqrt{\pi}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} e^{j2\pi\sigma 2e} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\varepsilon^2}} e^{j2\pi 2e(u+\sigma_0)} du$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 2e\sigma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{\varepsilon^2}} e^{j2\pi u 2e} du = \frac{1}{2} e^{j2\pi 2e\sigma_0} I(2e)$$

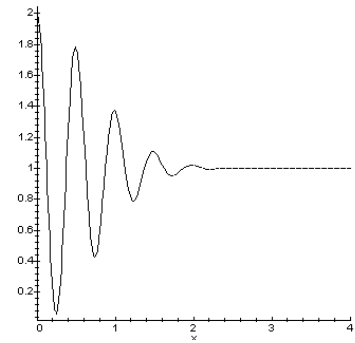
$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi 2e\sigma_0} \varepsilon \sqrt{\pi} e^{-\pi \varepsilon^2 4e^2}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sigma-\sigma_0)^2}{\varepsilon^2}} e^{-j2\pi\sigma 2e} d\sigma = \frac{1}{2} e^{-j2\pi 2e\sigma_0} I(-2e) = \frac{1}{2} e^{-j2\pi 2e\sigma_0} \varepsilon \sqrt{\pi} e^{-\pi \varepsilon^2 4e^2}$$

$$E = C\varepsilon \sqrt{\pi} [1 + e^{-\pi \varepsilon^2 4 e^2} \cos(4\pi e \sigma_0)]$$

$$2.2) E_0 = C\varepsilon \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Très rapidement à cause de la décroissance en $e^{-\pi \varepsilon^2 4 e^2}$ l'éclairement va devenir uniforme quand e augmentera.



$$3) E = E(\sigma_1) + E(\sigma_2) \text{ avec } \sigma_1 = \sigma - \Delta\sigma/2 \text{ et } \sigma_2 = \sigma + \Delta\sigma/2.$$

$$E_1 = \frac{E_0}{2} [1 + \cos(2\pi p_1)] ; E_2 = \frac{E_0}{2} [1 + \cos(2\pi p_2)] : p_1 = \delta\sigma_1 \text{ et } p_2 = \delta\sigma_2$$

$$E = E_1 + E_2 = E_0 [1 + \cos(2\pi \frac{p_1 + p_2}{2}) \cos(2\pi \frac{p_1 - p_2}{2})]$$

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = 2e\sigma \cos i = 2e\sigma \text{ au centre} ; \frac{p_1 - p_2}{2} = -e\Delta\sigma \cos i = -e\Delta\sigma \text{ au centre.}$$

$$E = E_0 [1 + \cos(2\pi e\Delta\sigma \cos i) \cos(2\pi 2e\sigma \cos i)]$$

$$\text{Au centre } E = E_0 [1 + \cos(2\pi e\Delta\sigma) \cos(2\pi 2e\sigma)]$$

$$3.2) \cos(2\pi e\Delta\sigma) = 0 \Rightarrow 2\pi e\Delta\sigma = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi \Delta e \Delta\sigma = \pi \Rightarrow \Delta e = \frac{1}{2\Delta\sigma}$$

B) Propagation sans pertes d'un signal dans un câble coaxial.

1) Calcul de la capacité et de l'inductance linéique du câble.

1.1) Calcul de la capacité Γ par unité de longueur.

$$a) \sigma' = -\sigma \frac{a}{b}$$

$$b) E(r)$$

$$c) E \text{ radial}$$

$$d) 2\pi r h E = \frac{\sigma 2\pi a h}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{\sigma a}{r \varepsilon}$$

$$e) \int_a^b -dV = \int_a^b E dr \Rightarrow V_a - V_b = \frac{\sigma a}{\varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$f) \Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

1.2) Calcul de l'inductance Λ par unité de longueur.

$$a) 2\pi a j = I \Rightarrow j = \frac{I}{2\pi a} \text{ et } j' = \frac{I}{2\pi b}$$

$$b) B(r)$$

Lycée Joliot-Curie Rennes

c) B orthoradial

$$d) 2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$e) E = \frac{1}{2} \Lambda I^2 = \iiint_{\Omega} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_a^b \frac{dr}{r^2} \int_0^1 dz = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

2) Propagation ; équations électriques.

2-1) Vitesse de propagation

$$a) V(z,t) = \Lambda \frac{\partial I}{\partial t} + V(z+dz, t) \Rightarrow \Lambda \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} = \frac{-\partial V(z,t)}{\partial z} \quad (a)$$

$$i(z,t) - i(z+dz, t) = \Gamma dz \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \Rightarrow \Gamma \frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = \frac{-\partial I(z,t)}{\partial z} \quad (b)$$

$$b) (a) \text{ et } (b) \Rightarrow \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial z^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} - \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$c) \text{ Célérité } c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

2-2) Impédance

a) Suivons un plan équiphasé $\varphi(z,t) = \omega t - kz = \varphi_0$. A $t+dt$ cherchons dz tel que

$$\varphi(z+dz, t+dt) = \varphi_0 \Rightarrow \omega dt - k dz = 0 \Rightarrow dz = \frac{\omega}{k} dt > 0$$

$$\omega t - kz = \omega(t - \frac{k}{\omega} z) = \omega(t - \frac{z}{c}) \text{ soit } c = \frac{\omega}{k}$$

$$b) \frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -\Lambda \frac{\partial I(z,t)}{\partial t} \Rightarrow j k [-\underline{V}_+ e^{j(\omega t - kz)} + \underline{V}_- e^{j(\omega t + kz)}] = -j \omega \Lambda [\underline{I}_+ e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kz)}]$$

Par identification : $k \underline{V}_+ = \omega \Lambda \underline{I}_+$ et $k \underline{V}_- = -\omega \Lambda \underline{I}_-$

$$\text{Avec } c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \Rightarrow \underline{V}_+ = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \underline{I}_+ \text{ et } \underline{V}_- = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \underline{I}_-$$

$$c) Z_1 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}$$

2-3) Réflexion

$$I_1(0,t) = \underline{I}_{1+} e^{j\omega t} + \underline{I}_{1-} e^{j\omega t} ; V_1(0,t) = Z_1 [\underline{I}_{1+} e^{j\omega t} - \underline{I}_{1-} e^{j\omega t}]$$

$$V_1(0,t) = Z_1 [\underline{I}_{1+} e^{j\omega t} - \underline{I}_{1-} e^{j\omega t}] = Z_2 \underline{I}_{2+} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow Z_1 [\underline{I}_{1+} - \underline{I}_{1-}] = Z_2 \underline{I}_{2+}$$

$$\underline{I}_{1+} + \underline{I}_{1-} = \underline{I}_{2+}$$

$$\underline{I}_{1-} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{I}_{1+}$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{\underline{I}_{1-}}{\underline{I}_{1+}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$Z_2 = \infty$	ligne ouverte	$\rho_1 = -1$ réflexion totale
$Z_2 = 0$	ligne 1 court circuitée	$\rho_1 = 1$ réflexion totale
$Z_2 = Z_1$	$\rho_1 = 0$	toute l'onde est transmise, pas de réflexion

3) Propagation ; équations électromagnétiques

3-1) Calcul de $\underline{B}$ en fonction de $\underline{E}$

$$\text{rot } \underline{E} = \frac{-\partial \underline{B}}{\partial t} \Rightarrow \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} \right] \underline{e}_r + \left[\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right] \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \underline{e}_z = -j \omega \underline{B}(r,z) e^{j\omega t} \underline{e}_\theta$$

$$\text{soit } \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} e^{j\omega t} = -j \omega \underline{B}(r,z) e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{B}(r,z) = \frac{-1}{j\omega} \frac{\partial \underline{E}(r,z)}{\partial z} \quad (1)$$

3-2) Calcul de $\underline{B}$ en fonction de l'intensité

$$\oint \underline{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \underline{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \iint \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{or} \quad \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \underline{B} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\text{soit } \underline{B}(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(z) \quad (2)$$

3-3) Ondes planes progressives.

$$\text{a) } \text{rot } \underline{B} = \frac{-\partial \underline{B}}{\partial z} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \underline{B}) \underline{e}_z ; \underline{B}(r,z) = \frac{-1}{j\omega} \frac{\partial \underline{E}(r,z)}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\text{rot } \underline{B} = \frac{1}{j\omega} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} \underline{e}_r + \left(\frac{\underline{B}}{r} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial r} \right) \underline{e}_z \quad \text{or} \quad \left(\frac{\underline{B}}{r} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial r} \right) = 0 \text{ compte tenu de (2)}$$

$$\text{rot } \underline{B} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = j\omega \epsilon \mu_0 \underline{E} \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon \mu_0 \underline{E} = 0 \quad \text{avec } \omega^2 \epsilon \mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\text{de solution } \underline{E} = \underline{E}_+ e^{jkz} + \underline{E}_- e^{-jkz} \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^2} = k^2 \quad \text{relation de dispersion}$$

3-4) Dépendance des champs

$$\text{a) } \underline{B}(r,z) = \frac{\mu_0}{2\pi r} [\underline{I}_+ e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kz)}]$$

$$\text{b) } \frac{\partial \underline{E}(r,z)}{\partial z} = -j \omega \underline{B} = -j \omega \frac{\mu_0}{2\pi r} [\underline{I}_+ e^{j(\omega t - kz)} + \underline{I}_- e^{j(\omega t + kz)}]$$

$$\underline{E} = j \omega \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[\frac{1}{-jk} \underline{I}_+ e^{j(\omega t - kz)} + \frac{1}{jk} \underline{I}_- e^{j(\omega t + kz)} \right] = \frac{\omega}{k} \frac{\mu_0}{2\pi r} [\underline{I}_+ e^{j(\omega t - kz)} - \underline{I}_- e^{j(\omega t + kz)}]$$

3-5) Potentiel

Le mode dans le guide étant transverse $\vec{E} = -\text{grad} V \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dV$

$$\int_b^r dV = V(r,z,t) - V(b,z,t) = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} [I_+ e^{j(\omega t - kz)} - I_- e^{j(\omega t + kz)}] \int_b^r \frac{dr}{r}$$

$$V(r,z,t) - V(b,z,t) = \frac{-1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} [I_+ e^{j(\omega t - kz)} - I_- e^{j(\omega t + kz)}] \text{Ln}\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$V(z,t) = V(r,z,t) - V(b,z,t) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} [I_+ e^{j(\omega t - kz)} - I_- e^{j(\omega t + kz)}] \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{on retrouve bien un résultat cohérent avec 2-2.}$$

3-6) Deux expressions de la puissance.

$$a) \quad \vec{B}(r,z,t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(z,t) \vec{e}_\theta$$

$$3-4) \Rightarrow \vec{E}(r,z,t) = c \frac{\mu_0}{2\pi r} [I_+ \cos(\omega t - kz + \alpha_+) - I_- \cos(\omega t + kz + \alpha_-)] \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \frac{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{r} [I_+ \cos(\omega t - kz + \alpha_+) - I_- \cos(\omega t + kz + \alpha_-)] \vec{e}_r \\ &= \frac{1}{r} \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} Z_1 [I_+ \cos(\omega t - kz + \alpha_+) - I_- \cos(\omega t + kz + \alpha_-)] \vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\text{soit } \vec{E}(r,z,t) = V(z,t) \frac{1}{r} \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{e}_r$$

b) Vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = V(z,t) I(z,t) \frac{1}{2\pi r^2} \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = V(z,t) I(z,t) \frac{1}{2\pi r^2} \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \vec{e}_z$$

$$c) \quad \mathcal{P} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = V(z,t) I(z,t) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{2\pi r}{r^2} dr = V(z,t) I(z,t) \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)} \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\text{Soit } \mathcal{P} = V(z,t) I(z,t)$$

d) Ce flux est bien égal à la puissance électrique transmise par le câble.