

1 *Corrigé de Laurent BEAU**Professeur de Sciences Physiques en Math Spé MP**Lycée Mohamed V. CASABLANCA**N'hésitez pas à me signaler des erreurs ou à me suggérer des commentaires ou des réponses plus "élégantes".
Merci.*

Quelques aspects de la physique des milieux granulaires

2 Première partie
Hystérésis de frottementNous noterons T_r la force exercée par le ressort sur la brique et P la norme du poids de la brique.1. A l'équilibre : $T_r + P + N + T = \vec{0}$ La position $x = 0$ correspondant au ressort au repos, T_r s'écrit : $T_r = -kx\mathbf{e}_x$ 1^{er} cas : $\theta = 0$ En projection sur Ox : $T - kx = 0$ En projection sur Oy : $N = P$ La brique est en équilibre si $\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$ c'est-à-dire :

$$|x| \leq \mu_s \frac{P}{k}$$

2^{ème} cas : $\theta = \pi/2$ En projection sur Ox : $T - kx + P = 0$ En projection sur Oy : $N = 0$ La brique ne peut donc être en équilibre que si $T = 0$ c'est-à-dire pour :

$$x = \frac{P}{k}$$

2.

a) Avant l'apparition du premier glissement, le ressort est détendu donc c et la brique est en équilibre parrapport au plan incliné : $T_r + P + N + T = \vec{0}$.En projection sur Ox : $T + P \sin \theta = 0$ En projection sur Oy : $N = P \cos \theta$ Quand on incline la paroi (θ augmente), $\|\vec{T}\| = P \sin \theta$ augmente et $\|\vec{N}\| = P \cos \theta$ diminue. Le glissementapparaît donc pour l'angle θ_1^+ tel que $\|\vec{T}\| = \mu_s \|\vec{N}\|$ soit :

$$\tan \theta_1^+ = \mu_s$$

Ensuite, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit en projection sur Ox (et en tenant compte d'un frottement visqueux et sans frottement solide) :

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - kx + P \sin \theta_1^+$$

La brique va donc avoir un mouvement oscillatoire amorti autour de la nouvelle position d'équilibre (atteinte plus ou moins rapidement suivant la valeur de h) :

$$x_1^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_1^+$$

b) Le même raisonnement que précédemment conduit à l'angle θ_2^+ pour lequel apparaît le 2^{ème} glissement.

Cette fois-ci, la force exercée par le ressort sur la brique n'est pas nulle et vaut : $\mathbf{T}_r = -kx_1^+ \mathbf{e}_x$.

Avant le 2^{ème} glissement, on a donc $\mathbf{T}_r + \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \stackrel{v}{=} \mathbf{0}$

En projection sur Ox : $T - kx_1^+ + P \sin \theta = 0$

En projection sur Oy : $N = P \cos \theta$

Comme précédemment, quand on incline la paroi (θ augmente), $\|\mathbf{T}\| = P(\sin \theta - \sin \theta_1^+)$ augmente et

$\|\mathbf{N}\| = P \cos \theta$ diminue. Le glissement apparaît donc pour l'angle θ_1^+ tel que $\|\mathbf{T}\| = \mu_s \|\mathbf{N}\|$ soit :

$$\sin \theta_2^+ - \sin \theta_1^+ = \mu_s \cos \theta_2^+$$

c) Plaçons-nous dans la situation d'équilibre (θ_i^+, x_i^+) et augmentons θ .

Tant qu'il n'y a pas glissement, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

En projection sur Ox : $T - kx_i^+ + P \sin \theta = 0$

En projection sur Oy : $N = P \cos \theta$

On montre de la même manière qu'en 2a) que : $x_i^+ = \frac{P}{k} \sin \theta_i^+$.

On a alors $\|\mathbf{T}\| = P(\sin \theta - \sin \theta_i^+)$ et $N = P \cos \theta$. Le glissement apparaît quand $\|\mathbf{T}\| = \mu_s \|\mathbf{N}\|$ c'est-à-dire pour l'angle θ_{i+1}^+ vérifiant la relation :

$$\sin \theta_{i+1}^+ - \sin \theta_i^+ = \mu_s \cos \theta_{i+1}^+$$

Puisque $\theta_{i+1}^+ \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \pi/2$, la différence $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$ tend vers zéro.

3. Effectuons maintenant le parcours inverse en partant de la verticale. La position d'équilibre initiale a été déterminée à la première question :

$$x = \frac{P}{k}$$

Tant qu'il n'y a pas glissement, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

En projection sur Ox : $T - k \frac{P}{k} + P \sin \theta = 0$ soit $T = P(1 - \sin \theta) > 0$

En projection sur Oy : $N = P \cos \theta$

Le glissement apparaît donc pour l'angle θ_1^- tel que $\|\mathbf{T}\| = \mu_s \|\mathbf{N}\|$ soit :

$$1 - \sin \theta_1^- = \mu_s \cos \theta_1^-$$

Ensuite, le mouvement oscillatoire s'amortit et la nouvelle position d'équilibre est :

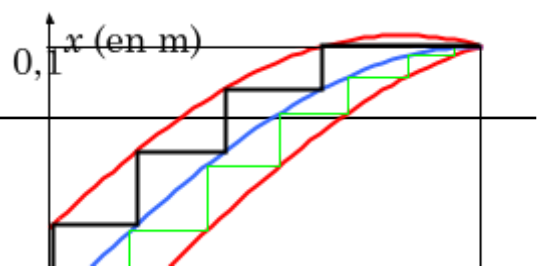
$$x_1^- = \frac{P}{k} \sin \theta_1^-$$

Les autres plages de non-glissement $[\theta_i^-, \theta_{i+1}^-]$ se déterminent comme précédemment. On trouve :

$$\sin \theta_i^- - \sin \theta_{i+1}^- = \mu_s \cos \theta_{i+1}^-$$

et les valeurs d'arrêts sont :

$$x_i^- = \frac{P}{k} \sin \theta_i^-$$



4. Les points (θ_i^+, x_i^+) et (θ_i^-, x_i^-) sont situés sur la courbe d'équation : $x = \frac{P}{k} \sin \theta$ (en bleu)

Les points (θ_{i+1}^+, x_i^+) sont situés sur la courbe d'équation : $x = \frac{P}{k} (\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$ (en pointillés rouges)

Les points (θ_{i+1}^-, x_i^-) sont situés sur la courbe d'équation : $x = \frac{P}{k} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$ (en rouge)

Une résolution numérique donne comme solutions :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i^+ (en cm)	0	2.87	5.40	7.41	8.82	9.63	9.95	9.9984	10	10	10
x_i^- (en cm)	1	8.35	5.93	3.08	$7,98 \cdot 10^{-2}$	/	/	/	/	/	/

On constate donc que le nombre de paliers visibles sur les courbes correspondent à cette résolution numérique (7 paliers visibles lors de la montée et 5 lors de la descente).

On vient de mettre en évidence le phénomène d'hystérésis évoqué en introduction de cette première partie : les positions d'équilibre dépendent de « l'histoire » de la mise en équilibre c'est-à-dire de l'évolution du système antérieure à la situation étudiée. Les positions d'équilibre seraient encore différentes si la situation initiale était un plan incliné ni horizontal ni vertical et un ressort initialement détendu.

Deuxième partie

Principe de dilatace de Reynolds

1.

- a) La surface occupée par l'objet est la somme de la surface du losange

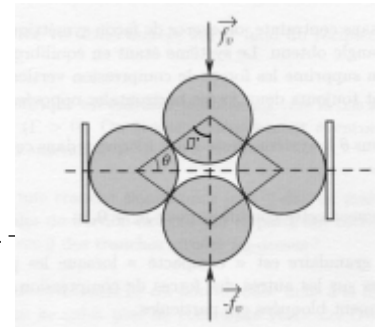
$$S_{\text{losange}} = \frac{L_v L_h}{2}$$

et de la surface des disques n'appartenant pas au losange :

$$S_{\text{disques hors losange}} = 2 \cdot \frac{2\pi - 2\theta}{2\pi} \pi R^2 + 2 \cdot \frac{2\pi - 2\theta'}{2\pi} \pi R^2 \quad \text{avec } \theta' = \pi/2 -$$

On en déduit :

$$S_t = \frac{L_v L_h}{2} + 3\pi R^2$$



- b) La partie variable de l'aire couverte est donc la surface du losange.

En écrivant que : $\left(\frac{L_h}{2}\right)^2 + \left(\frac{L_v}{2}\right)^2 = (2R)^2$, il vient :

$$\Delta S_t = 2L_h R \sqrt{1 - \left(\frac{L_h}{4R}\right)^2}$$

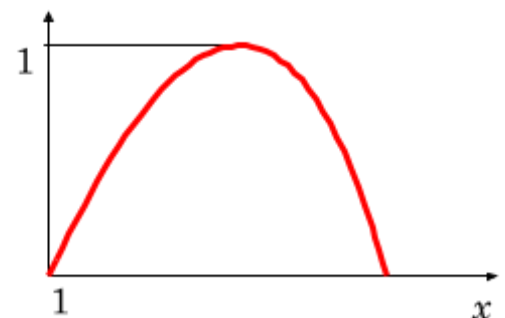
- c) La valeur minimale de L_h et de L_v est $2R$. La valeur

maximale de L_h est donc :

$$2R \leq L_h \leq 2\sqrt{3}R$$

En notant $x = \frac{L_h}{2R}$, on a donc :

$$\frac{\Delta S_t}{4R^2} = x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$



- d) La partie croissante de la courbe correspond au **régime de Reynolds** (la surface augmente lorsque le matériau est soumis à une compression verticale) alors que la partie décroissante de la courbe correspond au **régime solide** (la surface diminue sous l'effet de la compression).

Soit $f(x) = x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$. Sa dérivée $f'(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$ s'annule pour $x = \sqrt{2}$

La valeur $\frac{L_h}{2R} = \sqrt{2}$ correspond donc à la transition entre les deux régimes cités ci-dessus.

2.

a) L'équilibre du disque (1) (cf. schéma) s'écrit : $\vec{f}_n + \vec{f}_{41} + \vec{f}_{21} = \vec{0}$

En projection sur la verticale, on obtient en norme : $f_{21} = f_{41}$

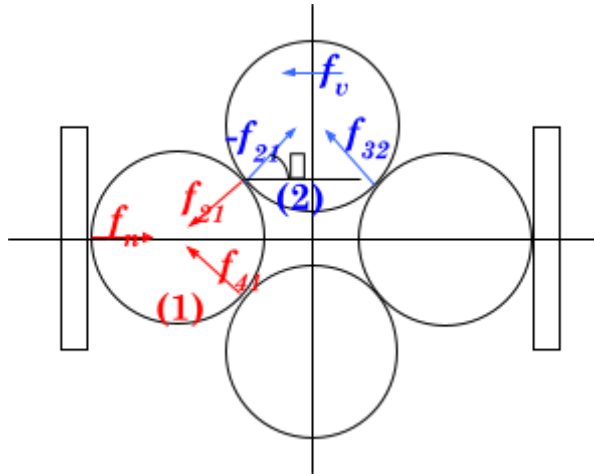
En projection sur l'horizontale : $f_h = (f_{21} + f_{41}) \cos \theta$ soit $f_h = 2f_{21} \cos \theta$

Faisons de même avec le disque (2) : $\vec{f}_v + \vec{f}_{32} - \vec{f}_{21} = \vec{0}$

En projetant sur l'horizontale : $f_{12} = f_{32}$

En projetant sur la verticale : $f_{12} \sin \theta + f_{32} \sin \theta = f_v$ soit : $f_v = 2f_{21} \sin \theta$

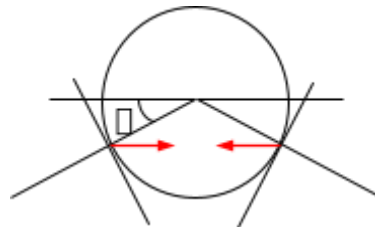
On en déduit donc : $f_h = K f_v$ avec $K = \cotan(\theta)$



b) A.N : **$K = 0,577$**

3.

a) La force de compression verticale a disparu. Le disque (2) reste en équilibre si $\vec{f}_{32} - \vec{f}_{21} = \vec{0}$. Ces deux forces sont donc obligatoirement horizontales (cf. figure ci-dessous).



La composante tangentielle au disque de la force $\vec{f}_{12}$ est donc : $|T_{12}| = f_{12} \sin \theta$ et sa composante normale est :

$|N_{12}| = f_{12} \cos \theta$. Le système est bloqué si $|T_{12}| \leq \mu_s |N_{12}|$, c'est-à-dire :
 $\tan \theta \leq \mu_s$

Un raisonnement sur les autres disques aboutit au même résultat.

b) A.N : $\tan \theta \leq 0,9 \Leftrightarrow \theta \leq 42^\circ$

Troisième partie

Problème du silo : modèle de Janssen-Rayleigh

1. Etude statique

- a) Ecrivons l'équilibre d'une tranche élémentaire entre z et $z + dz$:
- $$d\mathbf{T} + d\mathbf{N} + d\mathbf{mg} + (df_v(z) - df_v(z + dz))\mathbf{e}_z = 0$$
- où $d\mathbf{T}$ et $d\mathbf{N}$ sont les composantes tangentielle et normale des actions de contact de la paroi sur la surface latérale.

En projection sur la verticale :

$$dT(z) - dmg + (f_v(z) - f_v(z + dz))\mathbf{e}_z = 0$$

avec $f_v(z) = p_v(z) \frac{\pi D^2}{4}$ et $dT(z) = \int_{\text{surface latérale}} d^2T(z)$ où

$$d^2T(z) = \mu_s d^2N(z) = \mu_s p_h(z) d^2S$$

$$dT(z) \text{ s'écrit alors : } dT(z) = \mu_s p_h(z) \pi D dz = \mu_s K p_v(z) \pi D dz$$

$$\mu_s K p_v(z) \pi D dz - \rho g \frac{\pi D^2}{4} dz - \frac{\partial p_v}{\partial z} \frac{\pi D^2}{4} dz = 0$$

Finalement :

Après simplifications :

$$\frac{\partial p_v}{\partial z} - \frac{p_v}{\lambda} = -\rho g \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{D}{4K\mu_s}$$

- b) La contrainte verticale $p_v(z)$ s'écrit donc, en tenant compte de $p_v(H) = 0$:

$$p_v(z) = \rho g \lambda (1 - e^{-(z-H)/\lambda})$$

Pour $D = 10$ m, $K = 0,6$ et $\mu_s = 1$, on trouve $\lambda = 4,2$ m

- c) On distingue deux régimes :

pour $z \ll H$: $p_v(z)$ est constant : **régime saturé**

pour $z \approx H$: $p_v(z) \approx -\rho g(z - H)$; la contrainte verticale varie linéairement

avec z comme la pression d'un liquide incompressible ($p = p(0) - \rho g z$) : **régime hydrostatique**

- d) Le poids apparent de la colonne de grains est :

$$p_v(0) \pi D^2 = \rho g \lambda \pi D^2$$

Le poids réel est : $\rho g H \pi D^2$.

Compte tenu du fait que $H \gg D$ et λ de l'ordre de D , on conclut que le poids apparent est faible par rapport au poids réel : les parois cylindriques du récipient jouent un rôle de soutien.

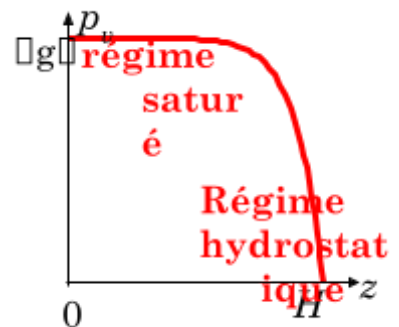
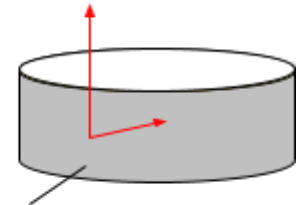
2.

- a) Si la tranche élémentaire entre z et $z + dz$ décolle, les tranches situées au-dessus décollent également car elles sont soumises à un poids apparent plus faible de la part des tranches supérieures.

- b) Dans le référentiel de la paroi, le principe fondamental de la dynamique s'écrit en projection verticale :

$$dm \mathbb{M} = (-p_v(z + dz) + p_v(z))S + dF_p - dmg + dF_{ie}$$

où dF_p est la résultante algébrique des forces verticales de friction exercée par la paroi sur la tranche élémentaire de granulats et dF_{ie} la force d'inertie d'entraînement s'exerçant sur cette tranche (la force



de Coriolis étant nulle car le référentiel des parois est en translation par rapport au référentiel terrestre).

$$dF_{ie} = -dm \mathbf{a}_e \cdot \mathbf{e}_y = dm \Gamma g$$

Si on suppose la tranche non décollée : $\mathbb{Z} = 0$ mais à la limite du décollement : $p_v(z) = 0$

Les tranches au-dessus ont décollé donc : $p_v(z + dz) = 0$

On obtient donc dans cette configuration :

$$dF_p = -dm g (\Gamma - 1)$$

dF_p est évidemment négative car cette force s'oppose au glissement du matériau sur les parois qui se ferait vers le haut en cas de décollement de la tranche.

On remarque donc que la tranche ne peut décoller que si $\Gamma > 1$.

c) Dans la dernière question de la deuxième partie, on a vu que dans le cas d'un matériau compacté, la contrainte horizontale est inchangée si on supprime la contrainte verticale. Une tranche de granulat à la limite du décollement ne subit plus de contrainte verticale et est compactée. La contrainte horizontale est donc la même qu'en régime statique :

$$p_h = K p_{v\text{stat}} = \rho g \lambda K (1 - e^{(z-H)/\lambda})$$

La tranche ne décolle pas tant que $|dF_p| < \mu_s p_h \pi D dz$ soit :

$$dm g (\Gamma - 1) < \mu_s \rho g \lambda K (1 - e^{(z-H)/\lambda}) \pi D dz$$

Sachant que $\mu_s \lambda K = D/4$ et $dm = \rho \pi D^2/4$, l'inégalité précédente se simplifie et devient :

$$e^{(z-H)/\lambda} < 2 - \Gamma \Leftrightarrow z < H + \lambda \ln(2 - \Gamma)$$

La hauteur de fracture, au-dessous de laquelle le matériau granulaire ne peut se détacher de la paroi est donc :

$$H_t = H + \lambda \ln(2 - \Gamma)$$

d) Une partie de l'empilement décolle si $H_t < H$ soit : $\Gamma > 1$. $\Gamma_{\min} = 1$. On retrouve la remarque faite en 2.b.

Tout l'empilement décolle si $H_t < 0$ soit $\Gamma > 2 - e^{-H/\lambda}$. $\Gamma_{\text{déc}} = 2 - e^{-H/\lambda}$

Pour un empilement de très grande hauteur ($H \gg \lambda$) : $\Gamma_{\text{déc}} \approx 2$

e) Le dispositif proposé permet de faire varier continûment l'accélération du récipient cylindrique entre $-A_m \omega^2$ et $A_m \omega^2$. L'accélération $-A_m \omega^2$ est observée en $z - z_{\text{eq}} = A_m$.

Si on veut que tout l'empilement décolle, il faut que $A_m \omega^2 > \Gamma_{\text{déc}} g$. Ici $H/\lambda = 20$, donc $\Gamma_{\text{déc}} \approx 2$

L'amplitude minimale des oscillations est donc :

$$A_{\min} = \frac{g}{2\pi^2 \nu^2} \approx 5,6 \text{ cm}$$

3.

a) Une tranche entre z et $z+dz$ déconnectée de ses voisines n'est soumise qu'à son poids et à l'action de la paroi (de sens opposée à la vitesse de glissement du matériau par rapport à la paroi c'est-à-dire **vers le haut**).

Donc :

$$dm \mathbb{Z} = dF_p - dm g = \mu_d p_h \pi D dz - dm g$$

Or, on prend $\mu_s = \mu_d$ et $p_h(z) = K p_v(z) = \rho g \lambda K (1 - e^{(z-H)/\lambda}) = dm g (1 - e^{(z-H)/\lambda})$

L'accélération réduite algébrique de la tranche est alors :

$$\bar{\Gamma} = \frac{\mathbb{Z}}{g} = -e^{(z-H)/\lambda} < 0$$

$$\Gamma = |\bar{\Gamma}| = e^{(z-H)/\lambda}$$

L'accélération d'une tranche décollée augmente avec z . L'empilement reste donc compact car les tranches supérieures rattrapent les tranches inférieures.

b) L'empilement reste compact. Déterminons son accélération réduite :

$$\Gamma_{ch} = -\frac{\ddot{z}}{g} = -\frac{1}{mg} \int_{z=0}^H dF_p + 1$$

m : masse totale de l'empilement

$$\Gamma_{ch} = \frac{1}{m} \int_0^H \rho S e^{(z-H)/\lambda} dz = \frac{\lambda}{H} (1 - e^{-H/\lambda})$$

Remarquons que $m\Gamma_{ch}g = p_v(0)S = \text{poids apparent}$: l'accélération de l'empilement est celle d'un corps en chute libre de poids égal au poids apparent de l'empilement.

Posons $x = H/\lambda$: $\Gamma_{ch} = (1 - e^{-x})/x$ et $\frac{d\Gamma_{ch}}{dx} = \frac{-1 + (1+x)e^{-x}}{x^2}$

Notons le numérateur $f(x) = (1+x)e^{-x} - 1$: $f'(x) = -xe^{-x} \leq 0$ pour $x \geq 0$.

Or $f(0) = 0$ donc $f(x) \leq 0$ et par suite Γ_{ch} décroissante pour $x \geq 0$.

Par conséquent, Γ_{ch} est une **fonction décroissante de H** .

Pour $(H/\lambda) \ll 1$ c'est-à-dire un empilement de faible hauteur, l'accélération réduite vaut 1 : l'empilement tombe sous l'effet de son poids réel car l'empilement n'est pas assez haut pour que les parois « retiennent » le système.

Pour $(H/\lambda) \gg 1$ c'est-à-dire un empilement de hauteur importante, l'accélération réduite vaut $\lambda/H \ll 1$ qui est le rapport entre le poids apparent et le poids réel : l'empilement tombe sous l'effet de son poids apparent qui correspond au poids d'une hauteur λ du matériau granulaire. λ est la hauteur caractéristique d'empilement à partir de laquelle les parois « retiennent » le matériau granulaire (on constate d'ailleurs que λ diminue quand le coefficient de frottement statique augmente ce qui est logique).

c) L'empilement inférieur B a une accélération $\Gamma_{ch}(H_f)$ et l'empilement supérieur A une accélération $\Gamma_{ch}(H - H_f)$. La fracture ne se refermera pas au cours de la chute si $\Gamma_{ch}(H_f) > \Gamma_{ch}(H - H_f)$. Or Γ_{ch} est une fonction décroissante de H .

Il faut donc que : $H_f < H/2$

* *
*