

數學(二) 第三次段考範圍:排列組合與機率

章節:高中數學(二)CH 3-5 機率性質與期望值

答案:100張

難易度:中

園遊會的飲料攤位為刺激買氣舉辦促銷活動, 購買任兩件飲料即可從抽獎箱抽一張折價券, 依折價券上的折數享折扣優惠。已知抽獎箱中有5折券60張, 6折券80張及9折券若干, 若攤位希望顧客結帳的價格至少是原價的7折以上, 則抽獎箱中至少要有_____張9折券。

【解】

設原價為 A 元, 9折券有 x 張, 依題意,

$$A \times 50\% \times \frac{60}{60+80+x} + A \times 60\% \times \frac{80}{60+80+x} + A \times 90\% \times \frac{x}{60+80+x} \geq A \times 70\%$$

$$\Rightarrow \frac{30+48+0.9x}{140+x} \geq 0.7$$

$$\Rightarrow 0.9x+78 \geq 0.7x+98$$

$$\Rightarrow x \geq 100$$

故抽獎箱中至少要有100張9折券。

學習內容:

D-10-4複合事件的古典機率:樣本空間與事件, 複合事件的古典機率性質, 期望值。

學習表現:

d-V-3理解事件的不確定性, 並能以機率將之量化。理解機率的性質並能操作其運算, 能用以溝通和推論。



答案:(1) 0.92 (2) $\frac{13}{2000}$ (3) 15.1

難易度:中

科學家的研究指出,目前大氣中的二氧化碳濃度已達到人類歷史紀錄以來的最高值。而溫室氣體造成暖化的加速,將導致地球的氣候系統陷入崩壞。下表為西元1983~2023年之間,每十年測得大氣中二氧化碳濃度 $X(\text{ppm})$ 與全球年均溫 $Y(^{\circ}\text{C})$ 之間的關係:

西元	1983	1993	2003	2013	2023
大氣中的二氧化碳 $X(\text{ppm})$ 濃度	330	350	370	390	410
全球年均溫 $Y(^{\circ}\text{C})$	14.3	14.5	14.7	14.6	14.9

試求:

- (1) X 與 Y 的相關係數($\sqrt{2} \approx 1.414$, 答案四捨五入至小數點後第二位)。
- (2) Y 對 X 的迴歸直線斜率。
- (3) 科學家預估西元2033年大氣中的二氧化碳 $X(\text{ppm})$ 濃度將達到450 ppm, 以此數據推估西元2033年全球年均溫為多少?(答案四捨五入至小數點後第一位)

【解】

$$(1) \mu_x = \frac{330+350+370+390+410}{5} = 370, \quad \mu_y = \frac{14.3+14.5+14.7+14.6+14.9}{5} = 14.6$$

X	330	350	370	390	410	
Y	14.3	14.5	14.7	14.6	14.9	
$X - \mu_x$	-40	-20	0	20	40	
$Y - \mu_y$	-0.3	-0.1	0.1	0	0.3	
$(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$	12	2	0	0	12	$\Sigma = 26$
$(X - \mu_x)^2$	1600	400	0	400	1600	$\Sigma = 4000$
$(Y - \mu_y)^2$	0.09	0.01	0.01	0	0.09	$\Sigma = 0.2$

$$r = \frac{26}{\sqrt{4000}\sqrt{0.2}} = \frac{13\sqrt{2}}{20} \approx 0.92$$

$$(2) m = \frac{26}{4000} = \frac{13}{2000}$$

$$(3) Y \text{對} X \text{的迴歸直線為 } y - 14.6 = \frac{13}{2000}(x - 370)$$

$$x = 450 \text{ 代入 } y = \frac{13}{2000} \times 80 + 14.6 = 15.12 \approx 15.1$$

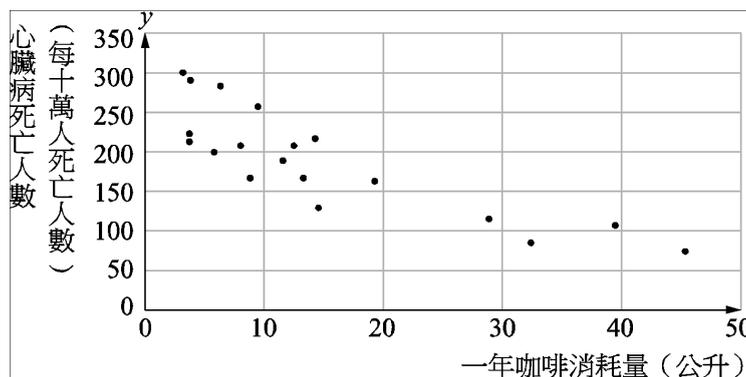
學習內容:

D-10-2數據分析:一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖,最適直線與相關係數,數據的標準化。

學習表現:

d-V-2能判斷分析數據的時機，能選用適當的統計量作為描述數據的參數，理解數據分析可能產生的例外，並能處理例外。

挪威一項研究發現,喝咖啡可降低心臟病死亡風險。右圖是根據19個已開發國家一年咖啡消耗量(平均一年每人所喝的咖啡公升數)與一年內因心臟病死亡的人數(每十萬人死亡人數)所畫成的散布圖。請選出正確的選項。



- (1) 這19個國家一年咖啡消耗量與心臟病死亡人數的相關係數是負的
- (2) 這19個國家一年咖啡消耗量的標準差大於50公升
- (3) 一年咖啡消耗量的中位數介於10到15公升之間
- (4) 若將心臟病死亡人數單位改為每百萬人死亡數,則相關係數會變小
- (5) 若直線 $y = mx + b$ 為「心臟病死亡人數」對「一年咖啡消耗量」的迴歸直線,則此直線的斜率 m 等於相關係數

【解】

- (1) : 迴歸直線斜率為負,故相關係數為負。
- (2) : 標準差必小於全距50。
- (3) : 19筆數據中位數為第10筆,咖啡消耗量由左至右第10筆資料介於10~15之間。
- (4) : 相關係數不變。

(5) : 由圖可知 $\sigma_x > \sigma_y$, 故 $m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} > r$ 。

故選(1)(3)。

學習內容:

D-10-2數據分析:一維數據的平均數、標準差。二維數據的散布圖,最適直線與相關係數,數據的標準化。

學習表現:

d-V-2能判斷分析數據的時機,能選用適當的統計量作為描述數據的參數,理解數據分析可能產生的例外,並能處理例外。

n-V-2能熟練操作計算機,能判斷使用計算機的時機,理解計算機可能產生誤差,並能處理誤差。

g-V-5理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法,而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題,能熟練前述操作,並用以推論及解決問題。

數學(四)A第三次段考範圍:矩陣

章節:高中數學(四)A CH 4-3 矩陣的應用:轉移矩陣與平面上的線性轉換

答案:(1) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$ (2) 0.56

難易度:易

數學在現今的職業運動中佔有重要的角色,透過統計方法可以分析出有助於比賽的資料,來增加球隊獲勝的機率。例如在職業棒球中,可以利用歷史的數據建立球員打擊表現的轉移矩陣,用來預測比賽中的表現,提供教練團作為戰術選擇的參考。已知翔平打出安打時,下一次上場打出安打的機率為0.6,若沒有打出安打,下一次上場打出安打的機率為0.5。

寫出翔平打擊表現的轉移矩陣

某次比賽,已知翔平在第一次上場打擊就打出安打,試求他第三次上場打擊也打出安打的機率。

【解】

(1)

	安打	未安打
安打	0.6	0.5
未安打	0.4	0.5

(2) 第一次打擊的狀態 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

第二次打擊的狀態 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ 。

第三次打擊的狀態 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.56 \\ 0.44 \end{bmatrix}$ 。

故第三次打擊也打出安打的機率為0.56。

學習內容:

A-11A-3矩陣的運算:矩陣的定義,矩陣的係數積與加減運算,矩陣相乘,反方陣。將矩陣視為資料表,用電腦做矩陣運算的觀念與示範。

學習表現:

a-V-3認識矩陣,理解線性組合與矩陣運算的意涵,並能用以解決問題。

數學(四)B第三次段考範圍:幾何圖形的應用與設計

章節:高中數學(四)B CH 4-1 黃金比例與等角螺線

答案:(4)

難易度:易

目前市面上的電腦螢幕依據顧客的需求,有各種不同的長寬比。若圖像符合黃金比例能提高視覺的吸引力。試問下列螢幕的長寬比哪一個最接近黃金比例?

(1)4:3 (2)5:4 (3)16:9 (4)16:10 (5)21:9

【解】

$$(1) \frac{4}{3} \approx 1.333 \quad (2) \frac{5}{4} = 1.25 \quad (3) \frac{16}{9} \approx 1.778 \quad (4) \frac{16}{10} = 1.6 \quad (5) \frac{21}{9} \approx 2.333$$

最接近1.618的是 $\frac{16}{10}$, 故選(4)。

學習內容:

G-11B-3平面上的比例:生活情境與平面幾何的比例問題(在設計和透視上)。

學習表現:

g-V-4理解並欣賞幾何的性質可以透過坐標而轉化成數與式的關係,而數與式的代數操作也可以透過坐標產生對應的幾何意義,能熟練地轉換幾何與代數的表徵,並能用於推論及解決問題。

