

I. MECANIQUE : MODELISATION D'UN CABLE DE PRECONTRAINTE

A - Elément de base.

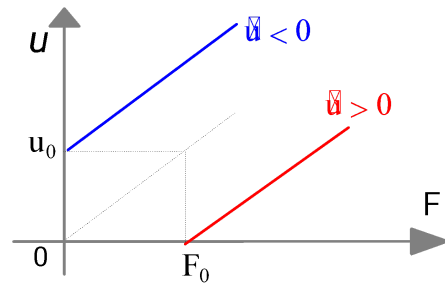
1- D'après les lois du frottement la force F_0 est de sens opposé au déplacement, soit en considérant F et $u > 0$:

si $\dot{u} > 0 \Rightarrow ku = F - F_0$; il faut donc $F > F_0$.

si $\dot{u} < 0 \Rightarrow ku = F + F_0$; il faut alors que

2 - Le graphe $u(F)$ se compose de $\frac{1}{2}$ droites de pente $1/k$.

Il y a indétermination sur u avec la seule donnée F .



3 - 1^{er} cas : F_M est inférieur à F_0 : le point A ne bougera pas donc $u = 0$.

Si F_M est supérieur à F_0 : le point A bouge, avec une vitesse positive, dès que F dépasse F_0

pour atteindre la position u_M définie par : $ku_M + F_0 = F_M$. En diminuant F , l'effort global sur le point A devient plus petit que F_0 donc A reste au repos en u_M .

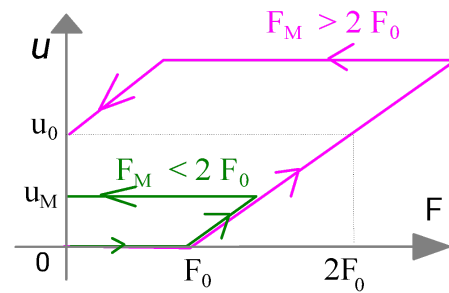
Le point A peut repartir en sens inverse lorsque : $ku_M - F > F_0$ soit $F_M - F > 2F_0$. Donc si

:

2^{eme} cas: $F_0 < F_M < 2 F_0$: A reste définitivement en u_M .

3^{eme} cas: $F_M > 2 F_0$: A repart en sens inverse et s'arrête en u_0 tel que $ku_0 = F_0$.

4 - Le graphe de $u(F)$ indique les deux trajets possibles. Dans tous les cas il reste un allongement résiduel de valeur maximal u_0 .



B - Généralisation.

5 - nœud A_1 : $k(u_1 - u_2) + F_0 = F_1$ nœud A_{i-1} : $k(u_{i-1} - u_i) + F_0 = k(u_{i-2} - u_{i-1})$

nœud A_2 : $k(u_2 - u_3) + F_0 = k(u_1 - u_2)$ nœud A_i : $k(u_i - u_{i+1}) + F_0 = k(u_{i-1} - u_i)$

6 - En faisant la somme des équations d'équilibre, on obtient : $k(u_i - u_{i+1}) + i.F_0 = F_1$ (*)

Or le déplacement $(u_i - u_{i+1})$ est > 0 donc il faut : $F_1 > i.F_0$.

7 - Le nœud A_i se déplace et le nœud A_{i+1} ne se déplace pas si $F_1 > i.F_0$ et $ku_i < F_0$

8 - Le nœud A_{i+1} est entraîné si $F_1 > (i + 1)F_0$.

9 - Avec $u_i > 0$ et $u_{i+1} = 0$ l'équation (*) donne : $ku_i = F_1 - i.F_0$, puis par récurrence:

$$\Rightarrow ku_{i-1} = 2(F_1 - i.F_0) + F_0 \Rightarrow ku_{i-2} = 3(F_1 - i.F_0) + 3F_0 \dots \dots \dots \Rightarrow ku_{i-p} = (p+1)(F_1 - i.F_0) + p.(p+1)F_0/2$$

Pour le premier nœud A_1 on a : $ku_1 = i.(F_1 - i.F_0) + i(i-1)F_0 = i(F_1 - F_0)$

10 - On a : $ku_1 = i(F_1 - F_0)$ et aussi la double condition : $i.F_0 < F_1 < (i + 1)F_0$.

Chaque valeur de i donne la plage de variation de F_1 . et de définir $u_i(F_1)$ par morceau.

$$i=1 \quad F_0 < F_1 < 2F_0 \Rightarrow ku_1 = F_1 - F_0$$

$$i=2 \quad 2F_0 < F_1 < 3F_0 \Rightarrow ku_1 = 2(F_1 - F_0)$$

$$i=3 \quad 3F_0 < F_1 < 4F_0 \Rightarrow ku_1 = 3(F_1 - F_0)$$

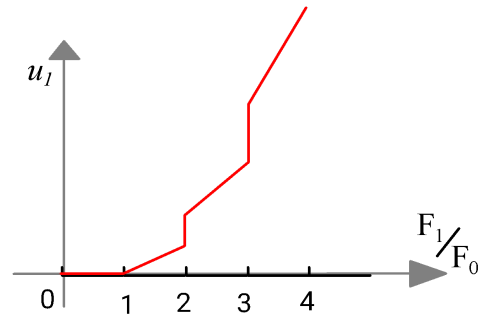
$$i=4 \quad 4F_0 < F_1 < 5F_0 \Rightarrow ku_1 = 4(F_1 - F_0)$$

.....

Ce qui est représenté ci-contre. On aperçoit des discontinuités inhérentes au modèle discret retenu.

11- La condition : $i.F_0 < F_1 < (i+1)F_0$ implique que $i = E(F_1/F_0)$, où $E(x)$ désigne la partie entière.

Ainsi on peut écrire : $ku_1 = E(F_1/F_0) \cdot [F_1 - F_0]$



$$12 - F_0 \rightarrow 0 \Rightarrow E(F_1/F_0) \approx F_1/F_0 \text{ alors } \Rightarrow \frac{\alpha}{\delta x} u_1 = \frac{F_1}{\beta \delta x} \cdot [F_1 - F_0] \text{ soit } u_1 = g(F_1) = \frac{F_1^2}{\alpha \beta}$$

13 - Le déplacement est proportionnel au carré de la traction. Il est donc relativement important.

II. INVERSIONS DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE

$$1.a \quad \delta \phi_c = \int_0^a \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{u}_r \wedge r d\theta \vec{u}_\theta) = -B \frac{a^2}{2} d\theta \Rightarrow 1.b \quad e = -\frac{\delta \phi_c}{dt} = B \frac{a^2}{2} \omega$$

$$2. \quad L_b \frac{dI_b}{dt} = (R_c - R_b)I_b - R_c I - e \quad \text{et}$$

$$3.a \quad d\vec{f} = I_b d\vec{r} \cdot \vec{u}_r \wedge B \vec{u}_z = -BI_b d\vec{r} \cdot \vec{u}_\theta \Rightarrow 3.b: \quad \vec{\Gamma}_m = -BI_b \vec{u}_z \int_0^a r dr = -\frac{a^2}{2} BI_b \vec{u}_z = \frac{a}{2} \vec{u}_r \wedge (-BI_b a \vec{u}_\theta)$$

$$3.c \quad \text{Théorème du moment cinétique projeté sur Oz} \Rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = C - f\omega - \frac{a^2}{2} BI_b$$

$$4.a \quad (R_c - R_b)I \text{ indéterminé} \Rightarrow 0 = (R_c - R_b)I - e \quad \text{et} \quad L \frac{dI}{dt} = -RI + (R_c - R_b)I$$

$$\text{Mais } e = B \frac{a^2}{2} \omega = kI \frac{a^2}{2} \omega = KI\omega \quad \text{en posant} \quad K = k \frac{a^2}{2} \quad \text{Il reste :} \quad L \frac{dI}{dt} = -RI + KI\omega$$

$$D'autre part l'équation mécanique donne : \quad J \frac{d\omega}{dt} = C - f\omega - \frac{a^2}{2} BI_b = C - f\omega - KI^2$$

$$4.b \quad \text{Energie électromécanique} \quad E = \frac{1}{2} (LI^2 + J\omega^2) \quad \text{et} \quad \frac{dE}{dt} = \sum P = C\omega - f\omega^2 - RI^2$$

$C\omega$ est la puissance motrice, $-f\omega$ est celle des frottements et RI^2 est la puissance Joule.

$$4.c \quad \text{Un état stationnaire est indépendant du temps, si en outre } I_s = 0 \Rightarrow 0 = C - f\omega_s \Rightarrow \omega_s = C/f$$

$$4.d \quad \alpha = \omega - \omega_s \Rightarrow \begin{cases} L \frac{dI}{dt} = -RI + KI(\alpha + \omega_s) \\ \frac{d\alpha}{dt} = C - f\omega_s - f\alpha - KI^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \frac{dI}{dt} = -(R - K \frac{C}{f})I \\ J \frac{d\alpha}{dt} = -f\alpha \end{cases} \quad \text{équations découplées}$$

La solution exponentielle $I(t)$ n'est pas divergente si $C < fR/K$

$$4.e \text{ Etat stationnaire} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -RI + KI\omega \\ 0 = C - f\omega - KI^2 \end{cases} \text{ soit si } I \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R = K\omega \\ C = f\omega + KI^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_s = R / K \\ I_s = \pm \frac{\sqrt{KC - fR}}{K} \end{cases}$$

$$4.f \Rightarrow L \frac{di}{dt} = -R(i + I_s) + K(i + I_s)(\alpha + \omega_s) \text{ et } J \frac{d\alpha}{dt} = C - f\omega_s - f\alpha - K(i + I_s)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \frac{di}{dt} = -Ri + Ki\omega_s + KI_s\alpha + KI_s\omega_s - RI_s \\ J \frac{d\alpha}{dt} = C - f\omega_s - f\alpha - K(2iI_s + I_s^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \frac{di}{dt} = \alpha\sqrt{KC - fR} \\ J \frac{d\alpha}{dt} = -f\alpha - 2i\sqrt{KC - fR} \end{cases}$$

$$\text{Avec } i(t) = i_M \exp(qt) \text{ et } \alpha(t) = \alpha_M \exp(qt) \Rightarrow \begin{cases} Lqi_M = \alpha_M \sqrt{KC - fR} \\ Jq\alpha_M = -f\alpha_M - 2i_M \sqrt{KC - fR} \end{cases}$$

Le système est non-dégénéré si son déterminant est nul $\Rightarrow JLq^2 + Lfq + 2(KC - fR) = 0$

La somme des racines est < 0 donc les solutions seront amorties si $\Delta = L^2 f^2 - 8JL(KC - fR) < 0$

or $C < fR / K$ donc un grand moment d'inertie et une faible inductance assurent la condition.

4.g Il s'agit de la situation décrite dans la question 4.f, la condition de stabilité est ici satisfaite.

4.h Le modèle avec $R_c = \infty$ conduit à un état stationnaire sans inversions, il ne rend pas bien compte du phénomène. Le modèle avec $R_c \neq \infty$ conduit par contre à des changements de signe pour I, donc des inversions pour B.