

Corrigé Physique Modélisation – E3A PSI 2015

Proposé par S. Laurette (lycée Robespierre – Arras).

Relu par B. Hallé (lycée Chatelet - Douai) et S. Dion (lycée Robespierre – Arras)

Merci de signaler toute erreur ou coquille à simon.laurette@prepas.org

Peut-être diffusé librement auprès des étudiants.

Question préliminaire. Quel peut être l'avantage majeur d'un système RFID actif par rapport à un système RFID passif ?

Une alimentation autonome du TAG peut permettre une puissance d'émission plus forte et ainsi **augmenter la distance émetteur/récepteur** lors de la transmission. On peut alors effectuer du suivi (patients dans les hôpitaux...) , de la localisation à distance d'objets (antivols pour voitures...).

On peut également imaginer qu'un TAF actif peut être plus facilement reprogrammé de manière autonome.

Partie I – Système RFID à 860MHz

A1. Déterminer le courant I_1 débité par le générateur, puis déterminer l'expression de P_{Z_u} en fonction de $|E_G|$, R_G , X_G , R_u et X_u .

La loi des mailles donne :

$$E_{-G} = (Z_{-G} + Z_{-u}) I_1$$

Soit :

$$I_1 = \frac{E_{-G}}{Z_{-G} + Z_{-u}}$$

La puissance moyenne reçue par Z_{-u} est :

$$P_{Z_u} = \operatorname{Re}(Z_u) \times I_{1eff}^2 = R_u \times \frac{|I_1|^2}{2} = \frac{R_u}{2} \times \frac{|E_{-G}|^2}{|R_G + jX_G + R_u + jX_u|^2}$$

$$P_{Z_u} = \frac{R_u}{2} \frac{|E_{-G}|^2}{(R_G + R_u)^2 + (X_G + X_u)^2}$$

A2. Pour Z_G et E_G fixés, montrer que P_{Z_u} est maximale quand l'impédance de la charge vérifie : $R_u + jX_u = R_G - jX_G$. Dans ce cas on dit que l'impédance de charge est adaptée à celle de la source (adaptation en puissance). Dans ces conditions, que valent les puissances P_{Z_u} , P_{E_G} et P_{Z_G} ?

Pour maximiser la puissance précédente, il convient de minimiser le dénominateur et de maximiser le numérateur, en gardant R_G , X_G et E_G fixés. La valeur de X_u n'influe que sur le dénominateur, somme de deux carrés.

Pour la valeur de $X_u = -X_G$, on annule un des carrés du dénominateur qui passe ainsi par sa valeur minimale par rapport à la variation de X_u . Il reste alors :

$$P_{Z_u} = \frac{R_u}{2} \frac{|E_{-G}|^2}{(R_G + R_u)^2}$$

Qui est maximale si la fonction

$$f(R_u) = \frac{R_u}{(R_G + R_u)^2}$$

Est maximale. Calculons sa dérivée :

$$\frac{df}{dR_u} = \frac{(R_G + R_u)^2 - 2R_u(R_G + R_u)}{(R_G + R_u)^4} = \frac{R_G^2 - R_u^2}{(R_G + R_u)^4}$$

Qui s'annule pour :

$$R_u = R_G$$

La charge est donc adaptée quand :

$$R_u + jX_u = R_G - jX_G$$

On a alors :

$$P_{Z_u} = \frac{R_G}{2} \frac{|E_{-G}|^2}{(R_G + R_G)^2} = \frac{|E_{-G}|^2}{8R_G}$$

$$P_{E_G} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E_G \times I_1^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(E_G \times \frac{E_G^*}{(Z_G + Z_u)^*}\right) = \frac{|E_G|^2}{4R_G}$$

$$P_{Z_G} = R_G I_{1eff}^2 = \frac{|E_{-G}|^2}{8R_G}$$

On retrouve bien que la puissance moyenne fournie par le générateur est la somme des puissances moyennes consommées par les récepteurs.

A3. Montrer qualitativement que les deux réactances X_1 et X_2 modifient l'impédance de la charge vue du générateur et permettent éventuellement une adaptation entre le générateur et le reste du montage.
Application numérique : on a tracé sur la figure 3 les lieux des points de coordonnées (X_1, X_2) donnant d'une part $X_{IN} = 0\Omega$ et $R_{IN} = 50,0\Omega$ d'autre part. En analysant cette figure, déterminer chaque couple de (X_1, X_2) assurant l'adaptation d'impédance ; donner le type de composant correspondant (bobine ou condensateur) et sa caractéristique (inductance ou capacité). Quel est le meilleur choix ? Expliquer.

Pour que la charge soit adaptée au générateur en question, il faut que, vue depuis le générateur, sa partie imaginaire soit nulle et que sa partie réelle soit égale à 50Ω . **Il faut donc modifier deux paramètres indépendants : pour cela on a besoin de deux composants indépendants** (ni en série, ni en parallèle) mis entre le générateur et la charge : c'est le rôle de jX_1 et jX_2

Vue du générateur, l'impédance équivalente est :

$$Z_{-IN} = jX_1 + \frac{jX_2 \times Z_u}{jX_2 + Z_u}$$

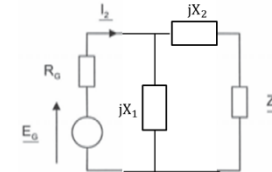
On remarque en particulier ici que le rôle de X_1 est de ramener la partie imaginaire de l'impédance Z_{-in} égale à 0 ; alors que X_2 car permettre d'ajuster la partie réelle.

Les valeurs de X_1 et X_2 assurant l'adaptation d'impédance se lisent aux intersections des lieux de points sur la figure : il y a deux couples possibles :

	Possibilité 1	Possibilité 2
X_1	$50\Omega > 0$ $\Rightarrow$ bobine d'inductance L_1 $L_1 \omega = 50\Omega$ $\Rightarrow L_1 = \frac{50}{2\pi \times 860.10^6} = 9.3nH$	$-50\Omega < 0$ $\Rightarrow$ condensateur de capacité C_1 $\frac{1}{C_1 \omega} = 50\Omega$ $\Rightarrow C_1 = \frac{1}{50 \times 2\pi \times 860.10^6} = 3.7pF$
X_2	$-70\Omega < 0$ $\Rightarrow$ condensateur de capacité C_2 $\frac{1}{C_2 \omega} = 70\Omega$ $C_2 = \frac{1}{70 \times 2\pi \times 860.10^6} = 2.6pF$	$250\Omega > 0$ $\Rightarrow$ bobine d'inductance L_2 $L_2 \omega = 250\Omega$ $L_2 = \frac{250}{2\pi \times 860.10^6} = 46nH$

A4. Sans calcul et en invoquant des propriétés de symétrie, proposer une modification simple de la figure 2 pour permettre une adaptation d'impédance dans le cas où $R_0 > R_u$.

On peut envisager de « retourner » le montage d'adaptation d'impédance :



B1. Démontrer les relations suivantes : $\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t}$.

Loi des mailles :

$$v(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + v(x + dx, t)$$

En utilisant le développement de Taylor :

$$v(x + dx, t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Et en simplifiant par dx , on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

La loi des nœuds donne de plus :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}$$

Qui donne de même :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t}$$

B2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $v(x, t)$ et $i(x, t)$. Exprimer c_l la vitesse de propagation.

Dérivons la première équation précédente par rapport à x , utilisons les propriétés d'inversion des opérateurs de dérivation (Schwartz), et utilisons la deuxième équation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

De même, en dérivant la deuxième équation par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

On reconnaît des équations de d'Alembert, associées à la célérité :

$$c_L = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$$

B3. Interpréter les significations physiques des grandeurs d'indice 1 et 2. Illustrer avec un graphique et expliquer.

Les termes d'indice 1 correspondent à des ondes planes progressives se propageant dans le sens des x croissants, alors que les termes d'indice 2 correspondent à des ondes planes progressives se propageant dans le sens des x décroissants.

En effet, considérons la fonction

$$i_1(u) = i_1\left(t - \frac{x}{c_L}\right)$$

Supposons qu'à $t=0$, elle soit maximale pour la valeur $x = x_0$.

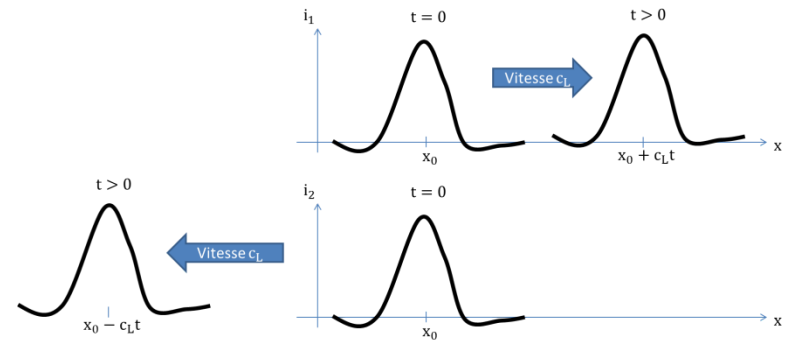
On peut donc dire que i_1 est maximale pour $u = 0 - \frac{x_0}{c_L} = -\frac{x_0}{c_L}$

A l'instant $t > 0$, i_1 est toujours maximale pour $u = -\frac{x_0}{c_L}$ (car i_1 fonction de u uniquement), donc pour :

$$t - \frac{x}{c_L} = -\frac{x_0}{c_L}$$

$$\Rightarrow x = x_0 + c_L t$$

La position du maximum s'est donc décalée vers les x croissants à la vitesse c_L : on a bien une onde se propageant dans le sens des x croissants.



B4. En utilisant la notation complexe, montrer que : $v_1(t-x/c_L) = R_C \cdot i_1(t-x/c_L)$ et $v_2(t+x/c_L) = -R_C \cdot i_2(t+x/c_L)$ où R_C est la résistance caractéristique du câble. Exprimer R_C en fonction de Γ et de Λ . Vérifier l'homogénéité.

Supposons que l'onde qui se propage sur le câble soit progressive dans le sens des x croissants :

$$i_{-1} = I_{-1} e^{j(\omega t - k_L x)} \quad \text{et} \quad v_{-1} = V_{-1} e^{j(\omega t - k_L x)}$$

En remplaçant ces expressions dans :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$$

On obtient :

$$-jk_L v_{-1} = -\Lambda j \omega i_{-1} \Rightarrow v_{-1} = \frac{\Lambda \omega}{k_L} i_{-1} = \Lambda c_L i_{-1} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} i_{-1}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} i_1 \quad \text{et} \quad R_C = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$

De même, en supposant que l'onde se propage dans le sens des x décroissants, on pose :

$$i_{-2} = I_{-2} e^{j(\omega t + k_L x)} \quad \text{et} \quad v_{-2} = V_{-2} e^{j(\omega t + k_L x)}$$

Et le remplacement dans l'équation aux dérivées partielles donne :

$$jk_L v_{-2} = -\Lambda j \omega i_{-2} \Rightarrow v_{-2} = -\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} i_{-2} = -R_C i_{-2}$$

Homogénéité :

$$[\Lambda dx] = \frac{\text{Tension} \times \text{Temps}}{\text{Intensité}} (= \text{Inductance})$$

$$[\Gamma dx] = \frac{\text{Intensité} \times \text{Temps}}{\text{Tension}} (= \text{Capacité})$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \right] = \left(\frac{\text{Tension}}{\text{Intensité}} \right) = \text{Résistance}$$

B5. En éliminant $\underline{V}_{10}$ et $\underline{V}_{20}$ Trouver les deux fonctions f et g telles que :

$$\begin{cases} \underline{V}_s = f(k_L \ell_L) \cdot \underline{V}_s + jR_c \cdot g(k_L \ell_L) \cdot \underline{I}_s \\ \underline{I}_s = jg(k_L \ell_L)/R_c \cdot \underline{V}_s + f(k_L \ell_L) \cdot \underline{I}_s \end{cases}$$

En remplaçant $x=0$ dans le système donné par l'énoncé :

$$\{ \underline{V}_{-e} = \underline{V}_{-10} + \underline{V}_{-20} \quad \underline{I}_{-e} = \frac{\underline{V}_{-10} - \underline{V}_{-20}}{R_c} \}$$

En $x=l_L$:

$$\{ \underline{V}_s = \underline{V}_{-10} e^{-jk_L l_L} + \underline{V}_{-20} e^{jk_L l_L} \quad \underline{I}_s = \frac{\underline{V}_{-10} e^{-jk_L l_L} - \underline{V}_{-20} e^{jk_L l_L}}{R_c} \} \Leftrightarrow \{ \underline{V}_s = \underline{V}_{-10} e^{-jk_L l_L} + \underline{V}_{-20} e^{jk_L l_L} R_c \underline{I}_s =$$

Ainsi :

$$\underline{V}_{-e} = \frac{(\underline{V}_s + R_c \underline{I}_s) e^{jk_L l_L}}{2} + \frac{(\underline{V}_s - R_c \underline{I}_s) e^{-jk_L l_L}}{2} = \left(\frac{e^{jk_L l_L} + e^{-jk_L l_L}}{2} \right) \underline{V}_s + \frac{R_c}{2} (e^{jk_L l_L} - e^{-jk_L l_L}) \underline{I}_s$$

$$\underline{V}_{-e} = \cos \cos(k_L l_L) \underline{V}_s + jR_c \sin(k_L l_L) \underline{I}_s$$

$$\underline{I}_{-e} = \frac{(\underline{V}_s + R_c \underline{I}_s) e^{jk_L l_L}}{2R_c} - \frac{(\underline{V}_s - R_c \underline{I}_s) e^{-jk_L l_L}}{2R_c} = \frac{e^{jk_L l_L} - e^{-jk_L l_L}}{2R_c} \underline{V}_s + \frac{e^{jk_L l_L} + e^{-jk_L l_L}}{2} \underline{I}_s$$

$$\underline{I}_{-e} = \frac{j}{R_c} \sin(k_L l_L) \underline{V}_s + \cos(k_L l_L) \underline{I}_s$$

On en déduit donc :

$$f(k_L l_L) = \cos \cos(k_L l_L) \quad \text{et} \quad g(k_L l_L) = \sin(k_L l_L)$$

B6. En déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z}_s = \frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_s}$ en fonction de R_G, R_c, k_L et ℓ_L .

R_G étant branchée en sortie du câble, on a de plus :

$$\underline{V}_{-s} = R_G \underline{I}_{-s}$$

Soit :

$$\underline{V}_{-e} = \cos \cos(k_L l_L) R_G \underline{I}_{-s} + jR_c \sin(k_L l_L) \underline{I}_{-s}$$

$$\underline{I}_e = \frac{j}{R_c} \sin(k_L l_L) R_G \underline{I}_{-s} + \cos(k_L l_L) \underline{I}_{-s}$$

L'impédance d'entrée est donc :

$$\underline{Z}_{-e} = \frac{\cos \cos(k_L l_L) R_G + jR_c \sin(k_L l_L)}{\frac{j}{R_c} \sin(k_L l_L) R_G + \cos(k_L l_L)}$$

B7. Pour quelles valeurs particulières de ℓ_L a-t-on $\underline{Z}_s = R_G$? Interpréter et discuter les différents cas.

Application numérique : calculer la longueur ℓ_L qu'il faut donner au câble coaxial de type RG58C/U entre le générateur - lecteur et l'antenne (Fig. 0) pour qu'il ne perturbe pas la condition d'adaptation d'impédance, si la distance D entre les deux vaut trois mètres ? On donne $\Lambda = 250 \text{ nH} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\Gamma = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

D'après l'expression de la question précédente, on remarque que si $\sin \sin(k_L l_L) = 0$, alors $\underline{Z}_{-e} = R_G$.

Ainsi, les longueurs qui conviennent sont :

$$l_L = \frac{p\pi}{k_L} \quad p \in \mathbb{N}$$

Interprétation :

Si $p=0 \Rightarrow$ il n'y a pas de câble : on voit donc tout de suite la résistance R_G .

Si $p=1 \Rightarrow l_L = \frac{\pi}{k_L} = \frac{\lambda_L}{2}$ où λ_L est la longueur d'onde de l'onde se propageant sur le câble. Entre l'entrée et la sortie, la longueur $\frac{\lambda}{2}$ implique une opposition de phase entre les signaux v_e et $v_s = -v_e$, ainsi qu'entre i_e et $i_s = -i_e$. Ainsi : $\frac{v_e}{i_e} = \frac{v_s}{i_s} = R_G$

Si $p=2 \Rightarrow l_L = \lambda_L$ et le courant (resp. tension) d'entrée vibre en phase avec le courant (resp. tension) de sortie $\Rightarrow v_s = v_e$ et $i_s = i_e \Rightarrow \frac{v_e}{i_e} = \frac{v_s}{i_s} = R_G$

Application numérique :

$$l_L = \frac{p\pi}{k_L} = \frac{p\pi c_L}{\omega} = p \times \frac{\pi}{\omega \sqrt{\Gamma \Lambda}} = p \times 0.116$$

Etant donné que $l_L > D = 3 \text{ m}$, prenons $p=26$

$$\bullet \quad l_L = 3.02 \text{ m}$$

C1. Rappeler les équations de Maxwell dans une région vide de charge et de courant. Peut-on se placer dans l'hypothèse de l'ARQS ? Que peut-on dire de l'intensité aux extrémités de l'antenne ? Expliquer le nom donné à cette antenne : «antenne demi-onde». Application numérique : si $f=860\text{MHz}$, calculer la longueur ℓ de l'antenne demi-onde.

Equations de Maxwell dans une région vide de charge et courant :

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{E}) &= 0 \\ \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

On s'intéresse ici à la propagation de l'onde de courant sur l'antenne, **on ne se place donc pas dans l'ARQS** (au sein duquel on néglige toute propagation). En effet, dans l'ARQS, i ne dépendrait pas de z au sein de l'antenne.

Aucune charge ne s'échappe de l'antenne => **l'intensité est nulle à ses extrémités.**

La longueur de l'antenne ℓ est égale **à la moitié de la longueur d'onde**, d'où le nom d'antenne demi-onde.

Application numérique :

$$\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = \frac{3.10^8}{2 \cdot 860.10^6} \approx 0.2m$$

C2. Etablir une condition sur ω , c et ℓ pour que $i(z,t)$ soit solution d'une équation de d'Alembert (dont les ondes se propagent à la célérité c)? Que représente I_0 ?

Si $i(z,t) = I_0 \cos(kz) \sqrt{2} \cos(\omega t)$ est solution de l'équation d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

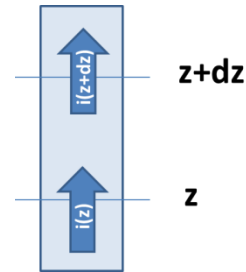
Alors :

$$-k^2 i(z,t) = \frac{1}{c^2} \times (-\omega^2) i(z,t)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega \lambda}{2\pi} = \frac{\omega \ell}{\pi}$$

I_0 est l'amplitude maximale de vibration, observée au ventre repéré par $z=0$

C3. Faire un bilan de charges sur un tronçon de conducteur infinitésimal de longueur δz pendant l'intervalle de temps δt . En déduire une relation entre une dérivée de $\lambda_c(z,t)$ et une dérivée de $i(z,t)$.



Considérons le tronçon de conducteur compris entre z et $z+dz$.

La charge située en son sein est :

$$\delta q = \lambda_c(z,t) dz$$

Entre t et $t+dt$, la variation de cette charge est :

$$\begin{aligned}\delta q(t+dt) - \delta q(t) &= i(z,t)dt - i(z+dz,t)dt \\ \lambda_c(z,t+dt)dz - \lambda_c(z,t)dz &= i(z,t)dt - i(z+dz,t)dt\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \lambda_c}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial z}$$

C4. Exprimer $\lambda_c(z,t)$ sachant de plus que pour tout z tel que $-\ell/2 < z < \ell/2$:

$\int_0^{2\pi/\omega} \lambda_c(z,t) dt = 0$. Déterminer la charge $q_+(t)$ portée par la moitié supérieure de l'antenne ? Que vaut la charge totale $q(t)$ portée par la totalité de l'antenne ?

On a donc :

$$\frac{\partial \lambda_c}{\partial t} = -k I_0 \sin(kz) \sqrt{2} \cos(\omega t)$$

D'où :

$$\lambda_c = -\frac{k I_0}{\omega} \sin(kz) \sqrt{2} \sin(\omega t) + C(z)$$

Et :

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{2\pi/\omega} \lambda_c dt = \int_0^{2\pi/\omega} -\frac{k I_0}{\omega} \sin(kz) \sqrt{2} \sin(\omega t) dt + \int_0^{2\pi/\omega} C(z) dt \\ &= -\frac{k I_0}{\omega} \sin(kz) \sqrt{2} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) dt + \int_0^{2\pi/\omega} C(z) dt = \int_0^{2\pi/\omega} C(z) dt = C(z) \frac{2\pi}{\omega} \\ &\Rightarrow C(z) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_c = -\frac{k I_0}{\omega} \sin(kz) \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$q_+(t) = \int_0^{\ell/2} \lambda_c dz = -\frac{k I_0}{\omega} \sqrt{2} \sin(\omega t) \int_0^{\ell/2} \sin(kz) dz = \frac{I_0}{\omega} \sqrt{2} \sin(\omega t) [\cos(kz)]_0^{\ell/2}$$

$$q_+(t) = -\frac{I_0}{\omega} \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$q(t) = \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} \lambda_c dz = \frac{I_0}{\omega} \sqrt{2} \sin(\omega t) \int_{-\frac{\lambda}{4}}^{\frac{\lambda}{4}} -\frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) dz = 0$$

C5. Justifier que $\vec{B}(M, t)$ soit polarisé selon $\vec{u}_\varphi$.

Pour tout point M, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant

$\Rightarrow \vec{B}(M, t)$ est donc orthogonal à ce plan et ainsi porté par $\vec{u}_\varphi$

C6. A partir d'une équation de Maxwell à préciser (utiliser le formulaire), trouver les composantes complexes $(E_r, E_\theta, E_\varphi)$ du champ $\vec{E}(M, t)$ et montrer en particulier qu'il est orthoradial. Donner les composantes réelles correspondantes de $\vec{E}(M, t)$ associé au champ complexe $\vec{E}(M, t)$.

L'équation de Maxwell Ampère en l'absence de courant donne :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Soit, en projetant dans la base sphérique, avec $B_r = B_\theta = 0$ et en notation complexe :

$$\{\mu_0 \epsilon_0 j \omega E_\varphi = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi r \sin(\theta)) = \frac{j \mu_0 I_0 \sqrt{2} e^{j(\omega t - kr)}}{2\pi r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right) \right) \mu_0$$

Soit, en négligeant les termes en $1/r^2$:

$$\{E_r = 0 \quad E_\theta = j \frac{k I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 \omega r \sin(\theta)} e^{j(\omega t - kr)} \quad E_\varphi = 0$$

On remarque que $\vec{E}$ ne possède qu'une composante selon $\vec{u}_\theta$: **il est bien orthoradial.**

On a alors :

$$\vec{E} = \frac{k I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 \omega r \sin(\theta)} \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{k I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 \omega r \sin(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

C7. En un point A_1 de l'axe (Ox) tel que $OA_1 = d$, déterminer l'amplitude et la polarisation du champ $\vec{E}(A_1, t)$ dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

A_1 est sur l'axe (Ox) $\Rightarrow \varphi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$ et $r = d$

$$\vec{E}(A_1, t) = \frac{k I_0 \sqrt{2}}{2\pi \epsilon_0 \omega d} \sin \sin(\omega t - kd) \vec{u}_z$$

C8. Donner les composantes réelles correspondantes du champ $\vec{B}(M, t)$ associé au champ complexe $\vec{B}(M, t)$.

$$\vec{B}(M, t) = \text{Re}(\vec{B}(M, t)) = \frac{\mu_0 I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{(\theta)} \cos \cos\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi$$

C9. Vérifier que le champ électromagnétique en M a la structure d'une onde plane progressive harmonique.

Pour une OPPH de vecteur d'onde $\vec{k}$, les équations de Maxwell imposent la structure suivante :

$$\{\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Dans notre cas, $\vec{k} = k \vec{u}_r$ et on a bien $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} &= -\frac{k^2 I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 \omega^2 r \sin(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \\ &= -\frac{I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 c^2 r \sin(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi \\ &= -\frac{\mu_0 I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi r \sin(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi = \vec{B} \end{aligned}$$

L'onde possède donc une structure similaire à celle d'une OPPH.

C10. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t)$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ au point M.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{k I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{2\pi \epsilon_0 \omega r \sin(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta \wedge -\frac{I_0 \sqrt{2} \cos \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \cos(\theta)\right)}{(\theta)} \sin \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{\Pi} = \frac{kl_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\epsilon_0 \omega 2\pi^2 r^2 \sin^2(\theta)} \sin^2(\omega t - kr) \vec{u}_r$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{kl_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\epsilon_0 \omega 2\pi^2 r^2 \sin^2(\theta)} \langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle \vec{u}_r = \frac{kl_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\epsilon_0 \omega 4\pi^2 r^2 \sin^2(\theta)} \vec{u}_r$$

On donne le résultat de l'intégrale suivante : $\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta \approx 1,22$ évaluée en partie E.

C11. Quelle est la puissance moyenne P_a rayonnée à travers la sphère de centre O et de rayon r ($r \gg \lambda$) ? Identifier une résistance R_a équivalente (dite de rayonnement) en $z=0$ telle que : $P_a = R_a \cdot I_0^2$. Application numérique : calculer R_a et I_0 dans le cas où $P_a = 3,30 \text{ W}$.

$$P_a = \iint_{\text{sphère}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{sphère}} \frac{kl_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\epsilon_0 \omega 4\pi^2 r^2 \sin^2(\theta)} \cdot r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{kl_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\epsilon_0 \omega 4\pi^2 \sin \theta} d\varphi d\theta = \frac{kl_0^2}{2\epsilon_0 \pi \omega} \int_{\theta=0}^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right)}{\sin \theta} d\theta$$

On en déduit que

$$P_a \approx \frac{1,22 kl_0^2}{2\epsilon_0 \pi \omega}$$

Et ainsi :

$$R_a = \frac{1,22k}{2\epsilon_0 \pi \omega} = \frac{1,22}{2\epsilon_0 \pi c} = 0,61 \frac{\mu_0 c}{\pi}$$

Application numérique :

$$R_a = 73,2 \Omega$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{P_a}{R_a}} = 212 \text{ mA}$$

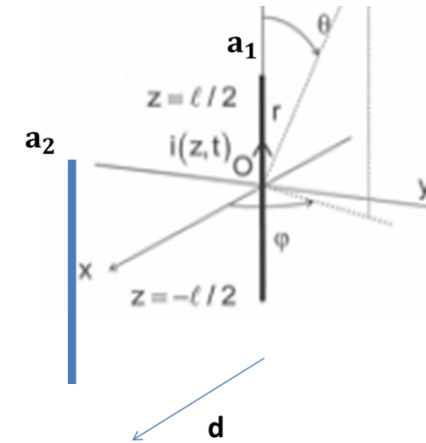
D1. En mode réception (Fig. 8), soit I le courant efficace circulant dans le circuit. Expliquer pourquoi l'antenne « re-rayonne » un champ électromagnétique. Déterminer la puissance P_R « re-rayonnée » par l'antenne en fonction de R_a et de I .

Lorsque l'antenne est en mode réception, l'arrivée de l'onde électromagnétique se traduit par la mise en mouvement des électrons au sein de l'antenne et ainsi par l'apparition d'un courant dans l'antenne.

La partie précédente a montré que l'antenne parcourue par un courant rayonne un champ électromagnétique => il y a donc « rerayonnement ».

$$P_R = R_a I^2$$

D2. Faire une figure faisant apparaître a_1 et a_2 . Application numérique : calculer V_{beff} .



En utilisant $\lambda = \frac{c}{f}$ et $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ on détermine :
 $V_{\text{beff}} \approx 0,3 \text{ V}$

D3. Exprimer la puissance moyenne P_C reçue par la charge en fonction de V_{beff} et R_a . Rappeler la signification physique de $\|\langle \vec{\Pi}(A, t) \rangle\|$. Montrer que a_2 reçoit une puissance $P_{Ra2} = k_b \lambda^2 \|\langle \vec{\Pi}(A, t) \rangle\|$ où k_b sera explicitée.

Dans le cas de l'adaptation d'impédance, la question A2 a permis de montrer que

$$P_C = \frac{(\sqrt{2} V_{\text{beff}})^2}{8 R_a} = \frac{V_{\text{beff}}^2}{4 R_a}$$

$\| < \vec{\Pi}(A_1, t) > \|$ est la puissance surfacique du champ électromagnétique rayonné au point A_1 . Or d'après C10 (avec $\theta = \pi/2$ en A_1) :

$$\vec{\Pi}(A_1, t) = \frac{kl_0^2}{\epsilon_0 \omega 2\pi^2 d^2} \sin^2(\omega t - kr) \vec{u}_x$$

$$\| < \vec{\Pi}(A_1, t) > \| = \frac{kl_0^2}{\epsilon_0 \omega 4\pi^2 d^2} = \frac{I_0^2}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

Or la puissance reçue par l'antenne a_2 est $\frac{(\sqrt{2}V_{beff})^2}{4R_a} = \frac{V_{beff}^2}{2R_a}$

$$P_{Ra2} = \frac{\lambda^2 I_0^2}{8R_a \pi^2 \epsilon_0 c^2 d^2} = \frac{1}{2R_a \pi^2 \epsilon_0 c} \lambda^2 \frac{I_0^2}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

$$P_{Ra2} = \frac{1}{2R_a \pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \lambda^2 \| < \vec{\Pi}(A_1, t) > \|^2$$

Et donc :

$$k_b = \frac{1}{2R_a \pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

D4. Pourquoi un tel nom pour A_0 ? Application numérique : calculer k_b et A_0 .

En terme de puissance, tout se passe comme si l'antenne présentait une surface A_e à l'onde reçue en A_1 .

Application numérique :

$$R_a = 73.2 \Omega \Rightarrow P_{Ra2} = \frac{V_{beff}^2}{2R_a} = 0.6 mW$$

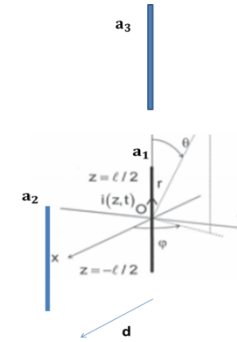
$$\text{Or : } \| < \vec{\Pi}(A_1, t) > \| = \frac{I_0^2}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2} = 1,7 \cdot 10^{-2} W$$

D'où :

$$A_e = \frac{P_{Ra2}}{\| < \vec{\Pi}(A_1, t) > \|} = 4 \cdot 10^{-2} m^2$$

$$\text{Or } \lambda = \frac{c}{f}, \text{ d'où : } k_b = 0.3$$

D5. Faire une figure faisant apparaître a_1 , a_2 et a_3 . Déterminer P_{30} en fonction de $k_b, \lambda, V_{beff}, \epsilon_0, c, d$ et R_a . Application numérique : calculer P_{30} .



Au vu du schéma, l'affirmation que a_3 joue le même rôle par rapport à a_2 que a_2 par rapport à a_1 est un peu étonnante.

Nous nous plaçons tout de même dans cette hypothèse qui permet d'écrire :

$$P_{30} = \frac{P_{Ra3}}{2} = \frac{k_b \lambda^2}{2} \| < \vec{\Pi} > \|^2 = \frac{k_b \lambda^2}{2} \frac{I^2}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

Où I est le courant circulant dans a_2 dans le cas de l'adaptation d'impédance:

$$I = \frac{\sqrt{2}V_{beff}}{2R_a} = \frac{V_{beff}}{\sqrt{2}R_a}$$

$$P_{30} = \frac{k_b \lambda^2}{2} \frac{1}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2} \frac{V_{beff}^2}{2R_a^2} = \frac{k_b \lambda^2 V_{beff}^2}{16R_a^2 \epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

Application numérique :

$$P_{30} = 2 \cdot 10^{-8} W$$

D6. Lorsque la charge de a_2 a une impédance $\underline{Z_c} = R_c + jX_c$ quelconque (non adaptée en puissance), montrer alors que la charge de a_3 reçoit la puissance P_3 telle que

$$P_3 = \frac{k'_b R_a^2}{|\underline{Z_a} + \underline{Z_c}|^2} \cdot P_{30} \text{ où } k'_b \text{ est une constante à déterminer.}$$

Application numérique : calculer $\frac{P_3}{P_{30}} = \frac{k'_b R_a^2}{|\underline{Z_a} + \underline{Z_c}|^2}$ pour $\underline{Z_c} = 0$, puis pour $\underline{Z_c} = \underline{Z_a}^*$ (conjugué de $\underline{Z_a}$) et enfin pour $\underline{Z_c} = \infty$.

On a toujours

$$P_3 = \frac{k_b \lambda^2}{2} \frac{I^2}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

Mais cette fois ci, la maille dans l'antenne a_2 donne :

$$I = \frac{\sqrt{2}V_{beff}}{|Z_a + Z_c|}$$

D'où :

$$P_3 = \frac{k_b \lambda^2}{2} \frac{1}{4\epsilon_0 c \pi^2 d^2} \frac{2V_{beff}^2}{|Z_a + Z_c|^2} = \frac{4R_a^2}{|Z_a + Z_c|^2} \frac{k_b \lambda^2 V_{beff}^2}{16R_a^2 \epsilon_0 c \pi^2 d^2}$$

$$P_3 = \frac{4R_a^2}{|Z_a + Z_c|^2} P_{30}$$

Application numérique :

Si $Z_c = 0$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_{30}} = \frac{4R_a^2}{R_a^2 + X_a^2} = \frac{4 \times 3X_a^2}{3X_a^2 + X_a^2} = 3$$

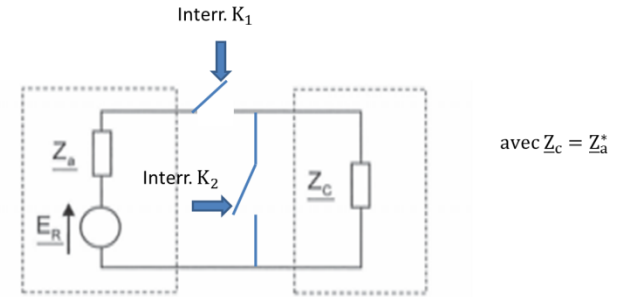
Si $Z_c = Z_a^*$, on est dans la condition d'adaptation d'impédance

$$\Rightarrow P_3 = P_{30} \Rightarrow \frac{P_3}{P_{30}} = 1$$

Si $Z_c \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{P_{30}} = 0$$

D7. Montrer à partir d'un schéma reprenant les éléments de la figure 8 comment réaliser en pratique ces trois conditions ($Z_c = 0$, $Z_c = Z_a^*$ et $Z_c = \infty$) avec seulement deux interrupteurs commandables.



K1	K2	Charge vue par le générateur
Fermé	Ouvert	Adaptée
Fermé	Fermé	0
Ouvert	Fermé ou Ouvert	∞

D8. Montrer que la modulation (appelée ici « rétromodulation ») de la charge de a_2 (réalisée par la puce électronique) permet de communiquer avec le générateur - lecteur RFID.

Ainsi en gérant (électroniquement) les commutations des interrupteurs, le TAG RFID module la puissance reçue par l'antenne a_3 sur la borne lectrice RFID qui peut prendre trois valeurs.

On peut donc coder des informations dans un langage à 3 symboles et réaliser une communication entre la borne et le TAG.

Partie II – Quelques aspects numériques du problème

Corrigé en Python.

E1. La fonction proposée ne fonctionne pas. Lorsqu'on l'utilise, on reçoit le message d'erreur suivant :

En langage Python :	En langage Scilab :
local variable 'sol1' referenced before assignment	variable non définie: sol1

Ajouter dans le code d'une des deux fonctions en annexe les instructions manquantes pour son bon fonctionnement.

Les listes sol1 et sol2 ne sont pas définies et initialisées. On peut rajouter les lignes suivantes :

```
def Resolution(N,eps):
    valeurs=[i*300/N for i in range (-N,N+1)] ## (1)
    sol1=[]
    sol2=[]
    for X1 in valeurs:      ## (2)
        for X2 in valeurs:  ## (3)
            if abs(Xin(X1,X2))<eps : ## (4)
                sol1.append(X1) ##(erreur indentation ?) (5)
                sol2.append(X2)
    return [sol1,sol2]
```

De plus, il semble qu'il y ait une erreur d'indentation après le test if.

E2. Expliquer le fonctionnement de l'algorithme. Préciser en particulier ce qu'il retourne et ce que représentent les variables d'entrées **N** et **eps**.

Détail des commentaires du programme précédent :

- (1) : création d'une liste allant de -300 à 300 par pas de 300/N
- (2) : on teste tous les X1 de -300Ohms à 300Ohms, par pas de 300/N
- (3) : on teste tous les X2 de -300Ohms à 300Ohms, par pas de 300/N
- (4) : chaque fois que la partie imaginaire de l'impédance équivalente X_{IN} est, en valeur absolue, inférieure à eps, on stocke le couple X1,X2
- (5) : dans la liste sol1, on trouve les valeurs de X1 qui, combinées à la valeur X2 stockée dans sol2 au même indice, donnent une réactance équivalente <eps

L'algorithme retourne deux listes sol1 et sol2 (regroupées dans une même liste) de sorte que tous les couples (sol1[i], sol2[i]) sont des couples (X_1, X_2) permettant d'obtenir une réactance équivalente nulle.

N permet de régler le pas entre deux valeurs successives de X_1 (et de X_2) testées par le programme : on le fixe en fonction de la tolérance des composants X_1 et X_2 à notre disposition expérimentalement.

eps est un seuil au-dessous duquel on peut approximer la valeur de X_{IN} comme étant nulle

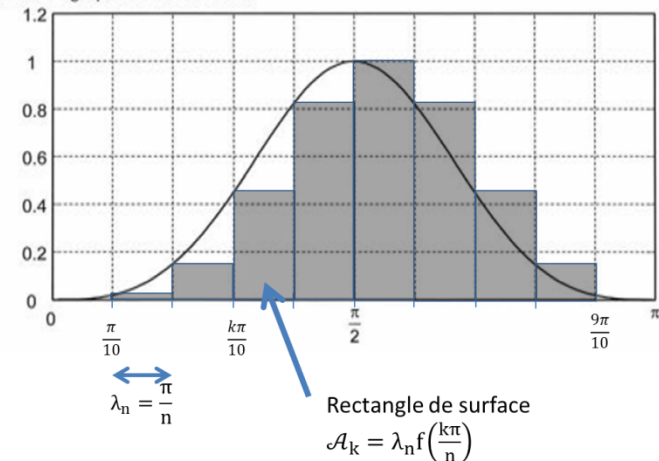
E3. Quelles contraintes informatiques empêchent d'utiliser ce programme pour des valeurs arbitrairement grandes de N ?

Augmenter N :

- augmente quadratiquement le temps de calcul.
- augmente quadratiquement la capacité de stockage nécessaire en mémoire
- en raison du codage des réels sur 64bits, la grandeur $300+300/N$ devient égale à 300 dès que $N > \text{environ } 5 \cdot 10^{15}$: si N trop grand, certains pas ne seront pas pris en compte.

F1. Illustrer le principe de la méthode des rectangles en représentant R_{10} sur le graphe de la fonction f fourni en annexe. Donner l'expression de λ_n en fonction de n.

Question F1 : graphe de la fonction f.



R_{10} est l'aire grisée sous les rectangles. En effet :

$$R_{10} = \sum_{k=1}^9 A_k = \lambda_n \sum_{k=1}^9 f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On a :

$$\lambda_n = \frac{\pi}{n}$$

F2. Écrire une fonction **f(x)** qui retourne la valeur de f pour un nombre réel x de $]0, \pi[$.

```
def f(x):
    return (cos(pi/2*cos(x)))**2/sin(x)
```

F3. Écrire une fonction **Rectangle1(n)** qui, pour un nombre entier $n \geq 1$, retourne la valeur de R_n .

```
def Rectangle1(n):
    Rn=0
    lambdan=pi/n
    for k in range(1,n):
        Rn=Rn+lambdan*f(k*pi/n)
    return Rn
```

F4. Combien d'évaluations de l'application f nécessite cet algorithme pour une valeur de n donnée ?

f est évaluée autant de fois que le nombre d'éléments dans `range(1, n)` soit :
n-1 fois

F5. Écrire une fonction **Integrale1(eps)** qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes successifs de la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_n - R_{n-1}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_n calculée.

```
def Integrale1(eps):
    n=2
    u=Rectangle1(n-1)
    v=Rectangle1(n)
    while abs(v-u)>eps:
        n=n+1
        u=v
        v=Rectangle1(n)
    return v
```

F6. Pour $\text{eps} = 10^{-7}$, **Integrale1(eps)** s'arrête pour $n = 34$. Vérifier que cela a nécessité plus de 500 évaluations de la fonction f.

Dans la fonction précédente, la fonction **Rectangle1(n)** a été appelée une fois pour chaque n allant de 1 à 34.

Nombre d'évaluations de f =

$$\sum_{n=1}^{34} \text{nb d'appel dans Rectangle1}(n) = \sum_{n=1}^{34} (n-1) = \sum_{i=1}^{33} n = \frac{33 \times 34}{2} = 561 > 500$$

F7. Quelle contrainte informatique empêche d'obtenir un résultat pertinent pour des valeurs arbitrairement petites de **eps** ?

De même que pour la question E3, les calculs n'ont d'intérêt que lorsque **eps** est plus grand que la limite de l'écart relatif entre deux nombres R_n consécutif : $2^{-(52+N)}$ où N est l'exposant de R_n dans son écriture à virgule flottante.

F8. Écrire la relation de récurrence pour un entier n de la forme $n = 2^{m-1}$. Écrire une fonction récursive **Rectangle2(m)** qui pour un nombre entier m retourne la valeur de R_{2^m} .

Si $n = 2^{m-1}$, alors :

$$R_{2^m} = \frac{R_{2^{m-1}}}{2} + \frac{\pi}{2^m} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} f\left(\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}{2^{m-1}}\right)$$

```
def Rectangle2(m):
    if m==0:
        return 0
    else:
        s=0
        for k in range(1, 2**(m-1)+1):
            s=s+f(((k-0.5)*pi)/2**(m-1))
        return 0.5*Rectangle2(m-1)+s*pi/(2**m)
```

F9. Combien d'évaluations de la fonction f nécessite cet algorithme pour une valeur de m donnée ?

Pour l'indice m, f est appelée :

2^{m-1} fois dans la somme + le nombre d'appel à l'indice m-1

Le nombre d'appel est donc :

$$\sum_{k=1}^m 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1 (= 2n - 1)$$

F10. Écrire une fonction **Integrale2(eps)** qui calcule, pour $\text{eps} > 0$, les termes succéda de la suite $(R_{2^m})_{m \geq 0}$ jusqu'à ce qu'on obtienne $|R_{2^m} - R_{2^{m-1}}| < \text{eps}$, puis qui retourne la dernière valeur R_{2^m} calculée. Cet algorithme doit impérativement être élaboré dans le but de minimiser le nombre total d'évaluations de f .



```
def Integrale2(eps):
    m=1
    u=Rectangle2(m-1)
    v=Rectangle2(m)
    while abs(v-u)>eps:
        m=m+1
        u=v
        v=Rectangle2(m)
    return m
```

F11. Pour $\text{eps}=10^{-7}$, **Integrale2(eps)** s'arrête pour $m=7$. Combien d'évaluations de la fonction f ont été nécessaires ?

Nombre d'appel =

$$\sum_{m=0}^7 \text{nombre d'appel dans Rectangle2}(m) = \sum_{m=0}^7 (2^m - 1) = \frac{1-2^8}{1-2} - 8 = 248$$

On a bien réduit ainsi le nombre d'appel de la fonction f .

G1. Proposer une façon d'estimer, à partir des données disponibles, la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle$ du vecteur de Poynting dû à l'antenne en un point M du maillage.

Étape 1 :

On calcule au point M :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} (E_x E_y E_z) \wedge (B_x B_y B_z) = \frac{1}{\mu_0} (E_y B_z - E_z B_y, E_z B_x - E_x B_z, E_x B_y - E_y B_x)$$

Étape 2 :

On moyenne les coordonnées du vecteur précédent sur une période de l'expérience en appliquant la formule suivante à chaque composante

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{1}{100} \sum_{p=0}^{99} \vec{\Pi}\left(M, \frac{p}{100f}\right)$$

G2. On souhaite maintenant estimer la puissance moyenne rayonnée par l'antenne à travers une surface fermée contenant l'antenne. Compte tenu des données disponibles, quelle est parmi les surfaces suivantes la plus pertinente pour obtenir une estimation précise de P_a (et donc de R_a) : la surface du cube $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]^3$, celle du cube $[-5, 5]^3$, la sphère de centre

O et de rayon $\frac{1}{10}$ ou la sphère de centre O et de rayon 5 ?

Le maillage étant cartésien par pas de 0.1m suivant x , y et z , il convient de choisir une surface fermée cubique plutôt que sphérique pour permettre le calcul du flux du vecteur de Poynting.

De plus, pour calculer la puissance rayonnée par l'antenne, il faut intégrer le vecteur de Poynting sur une surface choisie qui englobe l'antenne, de dimension inférieure à 16cm. Enfin, afin de minimiser l'erreur due à l'approximation de l'intégrale par une somme, on a intérêt à ce qu'une surface élémentaire discrétisée (d'aire h^2 , avec $h = 0.1m$ le pas de discrétisation) soit petite devant la surface d'intégration.

⇒ On choisit alors le cube $[-5; 5]^3$ pour réaliser le calcul intégral.

G3. Notons $(\langle \Pi_x(M, t) \rangle, \langle \Pi_y(M, t) \rangle, \langle \Pi_z(M, t) \rangle)$ les coordonnées de la valeur moyenne du vecteur de Poynting en un point M du maillage. Proposer une formule permettant d'estimer numériquement la résistance de rayonnement R_a .

$$R_a = \frac{P_a}{(1A)^2} = \iint_{\text{Surface extérieure du cube } [-5, 5]^3} \langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= - \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(-50, j, k)}{100} + \sum_{j=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_x(50, j, k)}{100} - \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, -50, k)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{k=-50}^{49} \frac{\Pi_y(i, 50, k)}{100} - \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, -50)}{100} + \sum_{i=-50}^{49} \sum_{j=-50}^{49} \frac{\Pi_z(i, j, 50)}{100}$$

G4. Proposer une démarche, qui en faisant varier la surface choisie, permettrait de s'assurer une bonne précision de la valeur estimée de R_a .

Le calcul précédent a été effectué sur une surface cubique dont l'arête est de 10m, constituée de $2n=100$ pas de calculs h ($h = 0.1m$).

On peut implémenter le calcul précédent dans une fonction **Resistance(n)** qui calcule R_a en intégrant le vecteur $\vec{\Pi}$ sur la surface cubique $\left[-\frac{n}{10}, \frac{n}{10}\right]^3$.

On cherche ensuite, à l'aide d'une boucle while par exemple, la valeur minimale de n telle que $|Resistance(n) - Resistance(n-1)| < \text{eps}$ où eps est choisi suffisamment petit en fonction de la précision désirée.

