Lenny DOHR-WAWRZINIAK

I. En fonction de la valeur de $n \in [\![0; 3]\!]$, dire si la fonction f_n définie sur R par

$$f_n(x) = \{x^n \sin sin\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x \neq 0\ 0\ sinon$$

est continue, dérivable, de classe C^1

II. Soit f une fonction de classe C^2 sur R à valeurs réelles admettant une limite réelle en $\pm\infty$. Montrer que f'' s'annule.

III. 1. Soit I un intervalle de R symétrique par rapport à 0 et $f: I \to R$ une fonction dérivable sur I. Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors f' est impaire (resp. paire).

2. Soit $T \in R_+^*$ et $f: R \to R$ une fonction T-périodique et dérivable sur R. Montrer que f' est T-périodique

Maxence GERGAUD

I. Soit $f: I \to R$ une fonction n fois dérivable, telle que f s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de I. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins n fois sur I.

II. Soit $f: R_+ \to R_+$ une fonction de classe C^2 sur R_+. On suppose que f'' est bornée et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in R_+, \alpha f(x) \leq f''(x)$$

Montrer que f est décroissante sur R_+

Montrer que f et f' ont une limite nulle en $+\infty$

III. Trouver toutes les fonctions $f: R \to R$ telles que

$$\forall P \in R[X], P \circ f = f \circ P$$

Thibaut SCHMITT

I. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $f: x \longmapsto \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}$ est la fonction $x \longmapsto (-1)^n\left(x^2 - (2n+1)x + n^2 + 1\right)e^{-x}$

II. Étudier la suite définie par son premier terme u_0 réel et la relation de récurrence

$$\forall n \in N, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

Déterminer les fonctions f définies sur R à valeurs dans R, de classe C^1 sur R telles que

$$\forall x \in R, f \circ f(x) = \frac{x+1}{2}$$

III. Soit $f: R_+ \to R$ une fonction de classe C^1 sur R_+ telle que

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Supposons qu'il existe $a \in R_+^*$ tel que $f(a) = 0$

Montrer qu'il existe un point M de C_f tel que la tangente en M à C_f passe par O.

Lenny DOHR-WAWRZINIAK

I. En fonction de la valeur de $n\in[\![0;3]\!]$, dire si la fonction f_n définie sur R par

$$f_n(x) = \{x^n \sin sin\left(\frac{1}{x}\right)\ si\ x\neq 0\ 0\ sinon$$

est continue, dérivable, de classe C^1

II. Soit f une fonction de classe C^2 sur R à valeurs réelles admettant une limite réelle en $\pm\infty$. Montrer que f'' s'annule.

On raisonne par l'absurde. On suppose que f'' ne s'annule pas sur R. f'' étant continue sur R, elle est de signe constant. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer

$$f'' > 0$$

On en déduit que f' est strictement croissante sur R. Réalisons une disjonction de cas selon le signe de $f'(0)$.

1er cas : $f'(0) > 0$

Par convexité de f (la courbe représentative de f étant au-dessus de ses tangentes),

$$\forall x\in R, f(x) \geq f'(0)(x - 0) + f(0)$$

D'après le théorème de comparaison,

$$f(x) \ =+\infty$$

Ce qui est absurde par hypothèse.

2e cas : $f'(0) = 0$

Par stricte croissance de f',

$$f'(1) > f'(0) = 0$$

On retombe alors sur le cas précédent. Il suffit alors d'appliquer la convexité en utilisant la tangente en 1.

3e cas : $f'(0) < 0$

Par croissance de f',

$$\forall x\in R, x\leq 0 \Longrightarrow f'(x) \leq f'(0)$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x\in R, x\leq 0 \Longrightarrow f(0) - f(x) \leq f'(0)(0 - x) \Longrightarrow f(x) \geq x f'(0) + f(0)$$

(NB : on pouvait aussi utiliser l'inégalité de convexité précédente)

D'après le théorème de comparaison,

$$f(x) \ =+\infty$$

Ce qui est absurde par hypothèse.

On déduit que f'' s'annule nécessairement sur R.

III. 1. Soit I un intervalle de R symétrique par rapport à 0 et $f: I\rightarrow R$ une fonction dérivable sur I. Montrer que si f est paire (resp. impaire) alors f' est impaire (resp. paire).

Supposons f paire.

$$\forall x\in I, f(-x) = f(x)$$

En dérivant membre à membre, on obtient

$$\forall x\in I, -f'(-x) = f'(x) \Longleftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

Donc f' est impaire.

Supposons maintenant f impaire.

$$\forall x\in I, f(-x) = -f(x)$$

En dérivant membre à membre, on obtient

$$\forall x\in I, -f'(-x) = -f'(x) \Longleftrightarrow f'(-x) = f'(x)$$

Donc f' est paire.

2. Soit $T\in R_+^*$ et $f: R\rightarrow R$ une fonction T-périodique et dérivable sur R. Montrer que f' est T-périodique

Soient $x\in R$ et $h\in R^*$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}$$

f étant dérivable sur R, par unicité de la limite lorsque h tend vers 0,

$$f'(x) = f'(x + T)$$

Donc f' est T-périodique.

Maxence GERGAUD

I. Soit $f : I \to R$ une fonction n fois dérivable, telle que f s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de I. Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins n fois sur I.

II. Soit $f : R_+ \to R_+$ une fonction de classe C^2 sur R_+. On suppose que f'' est bornée et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in R_+, \alpha f(x) \leq f''(x)$$

Montrer que f est décroissante sur R_+

Par hypothèse, f'' est positive sur R_+ donc f' est croissante sur R_+.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un réel x_0 tel que

$$m = f'(x_0) > 0$$

Par convexité de f (la courbe représentative de f étant au-dessus de ses tangentes),

$$\forall x \in R, f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

D'après le théorème de comparaison,

$$f(x) = +\infty$$

On en déduit que f et donc f'' ne sont pas majorées ce qui contredit que f'' est bornée. Ainsi, $f' \leq 0$ donc f est décroissante sur R_+

Montrer que f et f' ont une limite nulle en $+\infty$

Limite de f'

f' est majorée par 0 et croissante sur R_+ donc elle admet une limite finie $l \leq 0$ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Par ailleurs, par croissance de f',

$$\forall x \in R_+, f'(x) \leq l$$

D'après l'inégalité des accroissement finis,

$$\forall x \in R_+, f(x) - f(0) \leq l(x - 0)$$

On en déduit que f ne peut avoir une limite finie en $+\infty$ que si $l = 0$

Limite de f

La fonction f est minorée par 0 et décroissante sur R_+ donc elle admet une limite finie $l' \geq 0$ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Par ailleurs, par décroissance de f,

$$\forall x \in R_+, f(x) \geq l' \Longrightarrow \alpha l' \leq f''(x)$$

D'après l'inégalité des accroissement finis,

$$\forall x \in R_+, f'(x) - f'(0) \geq \alpha l'(x - 0)$$

On en déduit que f' ne peut avoir une limite finie en $+\infty$ que si $l' = 0$

III. Trouver toutes les fonctions $f : R \to R$ telles que

$$\forall P \in R[X], P \circ f = f \circ P$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $f : R \to R$ telle que

$$\forall P \in R[X], P \circ f = f \circ P \ (1)$$

Considérons le polynôme $P = X + h$ où h est un réel non nul

Ainsi,

$$\forall x \in R, f(x) + h = f(x + h) \Longleftrightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 1$$

Cette égalité étant vraie pour tout réel h non nul, on en déduit que f est dérivable (et donc continue) et $f' = 1$. Ainsi, il existe un réel a tel que

$$\forall x \in R, f(x) = x + a$$

Appliquons alors le polynôme nul à (1)

$$\forall x \in R, 0 = f(0) = a$$

Donc f est nécessairement l'identité qui est bien une solution de (1)

Thibaut SCHMITT

I. Montrer que la dérivée n-ième de la fonction $f: x \longmapsto \left(x^2 - x + 1\right)e^{-x}$ est la fonction $x \longmapsto (-1)^n\left(x^2 - (2n+1)x + n^2 + 1\right)e^{-x}$

II. Étudier la suite définie par son premier terme u_0 réel et la relation de récurrence

$$\forall n \in N, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$$

(u_n) est une suite arithmético-géométrique dont l'éventuelle limite l vérifie l'équation

$$l = \frac{l+1}{2} \Leftrightarrow l = 1$$

Posons alors

$$\forall n \in N, v_n = u_n - 1$$

Ainsi,

$$\forall n \in N, v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n + 1}{2} - 1 = \frac{u_n - 1}{2} = \frac{v_n}{2}$$

On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et premier terme $v_0 = u_0 - 1$. On obtient ainsi

$$\forall n \in N, u_n = v_n + 1 = \left(u_0 - 1\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \, n \longrightarrow \infty \rightarrow 1$$

Déterminer les fonctions f définies sur R à valeurs dans R, de classe C^1 sur R telles que

$$\forall x \in R, f \circ f(x) = \frac{x+1}{2}$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit $f: R \rightarrow R$ telle que

$$\forall x \in R, f \circ f(x) = \frac{x+1}{2} \; (1)$$

Soit $x \in R$. f étant dérivable sur R, $f \circ f$ l'est aussi. En dérivant membre à membre l'égalité précédente, on obtient

$$f'(x) \times f' \circ f(x) = \frac{1}{2}$$

En calculant cette dernière égalité pour $f(x)$, on obtient

$$f' \circ f(x) \times f' \circ f \circ f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f' \circ f(x) \times f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

En combinant les deux dernières égalités, on obtient nécessairement

$$f'(x) = f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Considérons alors la suite (u_n) précédente avec $u_0 = x$

Par ailleurs, soit $n \in N$,

$$f'\left(u_n\right) = f'\left(\frac{u_n + 1}{2}\right) = f'(u_{n+1})$$

Donc la suite $\left(f'\left(u_n\right)\right)$ est une suite constante qui tend vers $f'(1)$ par continuité de f' sur R. On en déduit que

$$f'(x) = f'\left(u_0\right) = f'(1)$$

On en déduit que f est une fonction affine donc il existe des réels a et b tels que

$$\forall x \in R, f(x) = ax + b$$

Dans ce cas

$(1) \Leftrightarrow \forall x \in R, a(ax + b) + b = \frac{x+1}{2}(1) \Leftrightarrow \forall x \in R, \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)x + \left(ab + b - \frac{1}{2}\right) = 0(1) \Leftarrow$

On en déduit que les deux seules fonctions répondant au problème sont les fonctions affines définies sur R par

$$f_1(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} \; et \; f_2(x) = -\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

III. Soit $f : R_+ \rightarrow R$ une fonction de classe C^1 sur R_+ telle que

$$f(0) = f'(0) = 0$$

Supposons qu'il existe $a \in R_+^*$ tel que $f(a) = 0$

Montrer qu'il existe un point M de C_f tel que la tangente en M à C_f passe par O.

$$f(0) = f(a) = 0$$

Considérons alors la fonction φ définie sur $[0; a]$ par

$$\varphi(x) = \{\frac{f(x)}{x}\ si\ x \neq 0\ 0\ sinon$$

Remarquons que, soit $x \in]0\ ;\ a[$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ x \longrightarrow 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

Donc φ est continue sur $[0; a]$ et dérivable sur $]0\ ;\ a[$ en tant quotient de fonctions dérivable sur $]0\ ;\ a[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0\ ;\ a[$ tel que $\varphi'(c) = 0$

Or,

$$\forall x \in]0\ ;\ a[,\ \varphi'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

Donc

$$\varphi'(c) = 0 = \frac{f'(c)c - f(c)}{c^2} \Leftrightarrow f'(c)c - f(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c)c = f(c)$$

Regardons alors l'équation de la tangente en c à la courbe représentative C_f de f

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) \Leftrightarrow y = f'(c)x - f'(c)c + f(c) \Leftrightarrow y = f'(c)x$$

L'équation de la tangente est bien l'expression d'une droite qui passe par l'origine O.