

INSTITUCION EDUCATIVA SAN JUAN BOSCO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
PENSAMIENTO Lógico – Matemático.

PROFESOR: Jhon Edwin Mosquera

EJE TEMATICO: SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 2X2

TIEMPO APROXIMADO: Horas

GUIA DE ESTUDIO N°

FECHA.....

INDICADORES LOGROS		
■ Cumple su función en el trabajo de grupo, respeta las funciones de las demás y contribuye a lograr productos comunes ■	■ Formula preguntas a partir de una observación o experiencias y escoge algunas de ellas para buscar posibles soluciones. ■ Cumple a tiempo con las tareas y trabajos que le son encomendadas ■	■ Escucha activamente a sus compañeras y reconoce puntos de vista diferentes y los compara con los suyos ■ Razona lógicamente frente a cualquier situación planteada ■

GUIA DE INFORMACIÓN

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales con dos o más incógnitas se

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones simultáneamente.

Para resolver un sistema 2x2, existen varios métodos: **El método gráfico, sustitución, igualación y reducción**; veremos a continuación el método grafico

Método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Cada una de las ecuaciones que forman un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas es la de una función de primer grado, es decir, una recta. El **método gráfico** para resolver este tipo de sistemas consiste, por tanto, en representar en unos ejes cartesianos, o sistema de coordenadas, ambas rectas y comprobar si se cortan y, si es así, dónde. Hay que tener en cuenta, que, en el plano, dos rectas sólo pueden tener tres posiciones relativas (entre sí): se cortan en un punto, son paralelas o son coincidentes (la misma recta). Si las dos rectas se cortan en un punto, las coordenadas de éste son el par **(x, y)** que conforman la única solución del sistema, ya que son los únicos valores de ambas incógnitas que satisfacen las dos ecuaciones del sistema, por lo tanto, el mismo es **compatible** llama **sistema de ecuaciones lineales.determinado**. Si las dos rectas son paralelas, no tienen ningún punto en común, por lo que no hay ningún par de números que representen a un punto que esté en ambas rectas, es decir, que satisfaga las dos ecuaciones del sistema a la vez, por lo que éste será **incompatible**, o sea sin solución. Por último, si ambas rectas son coincidentes, hay infinitos puntos que pertenecen a ambas, lo cual nos indica que hay infinitas soluciones del sistema (todos los puntos de las rectas), luego éste será **compatible indeterminado**.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el *método gráfico* se resume en las siguientes fases:

- i. Se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones.

- ii. Se construye, para cada una de las dos funciones de primer grado obtenidas, la tabla de valores correspondientes.
- iii. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
- iv. En este último paso hay tres posibilidades:
 - a. Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas x e y . **Sistema compatible determinado.**
 - b. Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. **Sistema compatible indeterminado.**
 - c. Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución. **Sistema incompatible.**

Ejemplo 1.

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de euros de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 600 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver el sistema por el método gráfico despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones y tendremos:

$$\begin{aligned} y &= -x + 600 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

Vamos ahora, para poder representar ambas rectas, a calcular sus tablas de valores:

$y = -x + 600$	$y = 2x$		
x	y	x	y
200	400	100	200
600	0	200	400

Con estas tablas de valores para las dos rectas y eligiendo las escalas apropiadas en los ejes OX y OY , podemos ya representar gráficamente:

Si observamos la gráfica, vemos claramente que las dos rectas se cortan en el punto $(200, 400)$, luego la solución del sistema es $x = 200$ e

$y = 400$. Por tanto, la respuesta al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los tres métodos analíticos.

Ejemplo 2.

La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 6; si al número se le resta 18, las cifras se invierten. Halla el número.

Sea xy , número desconocido

x , cifra de las decenas

y , cifra de las unidades.

De acuerdo con el enunciado del problema:

La suma de las cifras es 6:

$$x + y = 6 \quad (1)$$

La diferencia entre el número y 18

Corresponde al número invertido:

$$(10x + y) - 18 = 10y + x \quad (2)$$

(Observa que el número se obtiene

Multiplicando por 10 la cifra de las decenas y adicionándole las unidades.

Luego el sistema resultante es

$$\begin{array}{ll} x + y = 6 & (1) \rightarrow x + y = 6 \\ (10x + y) - 18 = 10y + x & (2) \rightarrow 9x - 9y = 18 \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \ y = 6 - x \\ (2) \ y = x - 2 \end{array}$$

Construimos la tabla de valores para cada ecuación

X_1	-1	0	1	2
Y_1	7	6	5	4
Y_2	-4	-2	0	2

La gráfica para estas dos funciones o ecuaciones sería.

Si observamos la grafica vemos que las rectas se cortan en el punto $(4, 2)$, luego la solución del sistema es $x = 4$ e $y = 2$, por lo tanto la respuesta al problema planteado es $xy = 8$

Método de sustitución:

De manera esquemática, para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas por el *método de sustitución* hay que seguir las siguientes fases:

- Se despeja una de las incógnitas en una cualquiera de las ecuaciones.
- Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de primer grado en una incógnita que resulta de esta sustitución.
- Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra en la ecuación despejada obtenida en el primer paso.

Evidentemente, aún cuando la incógnita que se va a despejar en el primer pasó puede ser cualquiera y de cualquier ecuación, es mejor, por la facilidad de los cálculos posteriores, hacer una buena elección de ambas, incógnita y ecuación. Queremos decir que será más fácil operar después si, por ejemplo, se elige una incógnita en una ecuación en la que "no tenga" coeficiente (es decir, que su coeficiente sea 1), ya que, en ese caso, podremos evitar el cálculo con fracciones.

Veamos ahora un ejemplo de resolución de un sistema mediante el método de sustitución:

Ejemplo 1

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de euros de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x + y &= 600 \\ y &= 2x\end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de sustitución, ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la y , ya despejada. Sustituimos el valor de $y = 2x$ en la primera ecuación, con lo que tendremos:

$$X + 2x = 600 \Rightarrow 3x = 600 \Rightarrow x = 600/3 \Rightarrow x = 200$$

Ahora sustituimos $x = 200$ en la ecuación en la que estaba despejada la y , con lo que tendremos:

$$y = 2x \Rightarrow y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**.

Ejemplo 2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 6; si al número se le resta 18, las cifras se invierten. Halla el número.

Sea **xy**, número desconocido

x, cifra de las decenas

y, cifra de las unidades.

De acuerdo con el enunciado del problema:

La suma de las cifras es 6:

$$x + y = 6 \quad (1)$$

La diferencia entre el número y 18

Corresponde al número invertido:

$$(10x + y) - 18 = 10y + x \quad (2)$$

(Observa que el número se obtiene

Multiplicando por 10 la cifra de las decenas y adicionándole las unidades.

$$\begin{array}{llll} \text{Luego el sistema resultante es} & x + y = 6 & (1) \rightarrow x + y = 6 & (1) \ y = 6 - x \\ & (10x + y) - 18 = 10y + x & (2) \rightarrow 9x - 9y = 18 & \end{array}$$

Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas en la ecuación, pero como en la Ecuación (1) la y está despejada aprovechamos esto y la reemplazamos en la ecuación (2) así:

$$9x - 9(6 - x) = 18 \rightarrow 9x - 54 + 9x = 18 \rightarrow 9x + 9x = 18 + 54 \rightarrow 18x = 72 \rightarrow x = \rightarrow \mathbf{x = 4}$$

Ahora reemplazamos este valor de x , en cualquiera de las dos ecuaciones; lo haremos en la primera por ser más sencillo en esta así.

$$Y = 6 - 4 \rightarrow \mathbf{y = 2} \text{ y el numero } \mathbf{xy} \text{ es } \mathbf{8}$$

Método de Igualación

El *método de igualación* consiste en una pequeña variante del antes visto de sustitución. Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado. Las fases del proceso son las siguientes:

- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
- Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.

A continuación, vamos a resolver el ejercicio anterior mediante el método de igualación.

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de euros de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x + y &= 600 \\ y &= 2x\end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de igualación y ya que en la 2ª ecuación hay una incógnita, la y ,

despejada, vamos a despejar la misma incógnita en la otra ecuación, con lo que tendremos:

$$y = 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 600 - x \Rightarrow 2x + x = 600 \Rightarrow 3x = 600 \Rightarrow x = 600/3 = 200$$

$$y = 600 - x$$

Ahora sustituimos $x = 200$ en una de las ecuaciones en las que estaba despejada la y , con lo que tendremos:

$$y = 2x \Rightarrow y = 400$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con el método de sustitución.

Ejemplo 2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 6; si al número se le resta 18, las cifras se invierten. Halla el número.

Sea **xy**, número desconocido

x, cifra de las decenas

y, cifra de las unidades.

De acuerdo con el enunciado del problema:

La suma de las cifras es 6:

$$x + y = 6 \quad (1)$$

La diferencia entre el número y 18

Corresponde al número invertido:

$$(10x + y) - 18 = 10y + x \quad (2)$$

(Observa que el número se obtiene

Multiplicando por 10 la cifra de las decenas

y adicionándole las unidades.

Luego el sistema resultante es

$$x + y = 6$$

$$(1) \rightarrow x + y = 6$$

$$(1) y = 6 - x$$

$$(10x + y) - 18 = 10y + x$$

$$(2) \rightarrow 9x - 9y = 18$$

$$(2) y = x - 2$$

En este caso también podemos despejar cualquiera de las incógnitas, pero como ya esta despejada la y procedemos a igualar sus resultados así.

$$6 - x = x - 2 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$$

y volvemos a reemplazar este valor en cualquiera de las dos ecuaciones

$$y = x - 2 \rightarrow y = 4 - 2 \rightarrow y = 2 \text{ y el número } xy \text{ es } 42$$

Método de Reducción

El último de los métodos analíticos que vamos a aprender a utilizar en esta Unidad para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas es el *método de reducción*. En resumen, consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de la x o los de la y sean iguales pero con signo contrario. A continuación se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Una vez resuelta esta, se sustituye la incógnita hallada en una de las ecuaciones del sistema y se despeja la otra. Veamos el proceso por fases.

- Se multiplican las ecuaciones por los números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes queden iguales pero de signo contrario,
- Se suman ambas ecuaciones del nuevo sistema, equivalente al anterior.
- Se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.
 - Se sustituye la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y se despeja la otra.

Veamos de nuevo el mismo ejemplo de los métodos anteriores resuelto por el *método de reducción*:

Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble de euros que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Llamemos x al número de euros de Ana e y al de Sergio. Vamos a expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones: Si los dos tienen 600 euros, esto nos proporciona la ecuación $x + y = 600$. Si Sergio tiene el doble de euros que Ana, tendremos que $y = 2x$. Ambas ecuaciones juntas forman el siguiente

sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 600 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de reducción. Para ello, teniendo en cuenta que, en ambas ecuaciones, la y tiene coeficientes opuestos, podemos pasar a sumar directamente ambas y nos quedará:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 600 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$3x = 600 \Rightarrow x = 600/3 \Rightarrow x = 200$$

Como en secciones anteriores ya hemos resuelto esta parte del problema sustituyendo la x para despejar la y , ahora reemplazamos la x en cualquiera de las dos ecuaciones así:

$$\begin{aligned} 200 + y &= 600 & y &= 600 - 200 \\ \text{Luego } y &= 400 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución al problema planteado es que Ana tiene **200 euros** y Sergio tiene **400 euros**, es decir, el mismo resultado, evidentemente, que habíamos obtenido con los métodos de sustitución e igualación.

Ejemplo 2.. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 6; si al número se le resta 18, las cifras se invierten. Halla el número.

Sea **xy**, número desconocido

x, cifra de las decenas

y, cifra de las unidades.

De acuerdo con el enunciado del problema:

La suma de las cifras es 6:

$$x + y = 6 \quad (1)$$

La diferencia entre el número y 18

Corresponde al número invertido:

$$(10x + y) - 18 = 10y + x \quad (2)$$

(Observa que el número se obtiene

Multiplicando por 10 la cifra de las decenas
y adicionándole las unidades.

$$\begin{aligned} \text{Luego el sistema resultante es} \quad & x + y = 6 & (1) \rightarrow x + y &= 6 \\ & (10x + y) - 18 = 10y + x & (2) \rightarrow 9x - 9y &= 18 \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 9 para que ambas queden con igual coeficiente y ya que las y tienen diferentes signos nos resulta entonces

$$9x + 9y = 54$$

$$9x - 9y = 18 \quad \text{y reduciendo las } y \text{ tendríamos}$$

y como anteriormente ya hemos resuelto esta parte $y = 2$ por lo tanto

el número **xy** es 8

Actividades de Desarrollo

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando, para cada uno de ellos, un método analítico distinto:

$$\begin{array}{lll} \text{B} \quad \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 3x - 9y = 6 \end{cases} & \text{C} \quad \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = -3 \end{cases} & \text{D} \quad \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los métodos analíticos y mediante el método gráfico. Clasifica el sistema según sus soluciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

La *resolución de problemas* en general, y mediante sistemas de ecuaciones en este caso particular, es un proceso complejo para el que, desgraciada o afortunadamente (según se mire), no hay reglas fijas ni resultados teóricos que garanticen un buen fin en todas las ocasiones.

De todas formas, si hay algo que ayuda en cualquier caso a llevar a buen termino la resolución de un problema es el orden. Por ello, hay que ser metódico y habituarse a proceder de un modo ordenado siguiendo unas cuantas fases en el desarrollo de dicha resolución.

Las cuatro fases que habrá que seguir para resolver un problema son:

- I. *Comprender el problema.*
- II. *Plantear el problema.*
- III. *Resolver el problema* (en este caso, el sistema).
- IV. *Comprobar la solución.*

Todo ello quizás quede más claro si se observa el siguiente cuadro que detalla, una a una, las cuatro fases de este

Proceso

1. Comprender el problema. • Leer detenidamente el enunciado. • Hacer un gráfico o un esquema que refleje las condiciones del problema. • Identificar los datos conocidos y las incógnitas.	2. Plantear el problema. • Pensar en las condiciones del problema y concebir un plan de acción, • Elegir las operaciones y anotar el orden en que debes realizarlas. • Expresar las condiciones del problema mediante ecuaciones.
3. Resolver el problema. • Resolver las operaciones en el orden establecido. • Resolver las ecuaciones o sistemas resultantes de la fase 2. • Asegurarse de realizar correctamente las operaciones, las ecuaciones y	4. Comprobar la solución. • Comprobar si hay más de una solución. • Comprobar que la solución obtenida verifica la ecuación o el sistema. • Comprobar que las soluciones son acordes con el enunciado y que se cumplen las condiciones de éste.

los sistemas.	
---------------	--

Veamos ahora con un ejemplo práctico el desarrollo de estas cuatro fases de la resolución de un problema mediante el uso de sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. El enunciado del problema puede ser el siguiente:

En un examen de 20 preguntas la nota de Juan ha sido un 8. Si cada acierto vale un punto y cada error resta dos puntos, ¿cuántas preguntas ha acertado Juan?, ¿cuántas ha fallado?

Pasemos de inmediato a la **primera fase**. Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pregunta y cómo vamos a llamar a las incógnitas que vamos a manejar en la resolución del problema.

Está claro que las preguntas que hay que contestar son las del final del enunciado, es decir, cuántas preguntas ha fallado y cuántas ha acertado Juan. Llamemos entonces x al número de respuestas acertadas e y al de falladas.

En la **segunda fase**, hay que efectuar el planteamiento del problema. Atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

El número total de preguntas es 20, luego: $x + y = 20$

La nota es un 8 y cada fallo resta dos puntos: $x - 2y = 8$

Ya tenemos el sistema planteado, por tanto, pasamos a la **tercera fase**, es decir, la resolución del sistema. Para ello, podemos utilizar cualquiera de los métodos vistos en las secciones anteriores. Si aplicamos, por ejemplo, el método de sustitución tendremos:

De la segunda ecuación: $x = 2y + 8$; **Sustituyendo en la primera:**

$2y + 8 + y = 20 \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = 12/3 \Rightarrow y = 4$;

Sustituyendo en la ecuación del principio: $x = 16$.

Una vez halladas las soluciones del sistema, las traducimos a las condiciones del problema, es decir, tal y como habíamos nombrado las incógnitas, Juan ha acertado **16** preguntas y ha fallado **4**. Podemos pasar pues a la **cuarta fase** que consiste en comprobar si la solución es correcta.

Si ha acertado **16** preguntas, Juan tendría en principio **16 puntos**, pero, al haber fallado **4**, le restarán el doble de puntos, es decir **8**. Por tanto, $16 - 8 = 8$ que es la nota que, según el enunciado del problema, ha obtenido. Luego se cumplen las condiciones del problema y la solución hallada es correcta y válida.

Actividades de Desarrollo

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2

Resuelve los siguientes problemas por el método que mejor te parezca

1. La suma de dos números es 25 y la diferencia entre el número mayor y el menor es 5. Hallar los números.
2. En un teatro 10 entradas de adultos y 9 de niños cuestan \$ 81 500 y 17 entradas de niños y 15 de adultos cuestan \$134500. Hallar el precio de cada una de las entradas.
3. La suma de dos números es 36 y su diferencia es 4. Hallar los números
4. Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.
5. La edad de maría hace 8 años era el triple de la de su hijo pablo. Dentro de 4 años la edad de pablo será $\frac{5}{9}$ de la de su madre. ¿qué edad tiene actualmente maría y pablo?
6. El perímetro de una sala rectangular es 18m y cuatro veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Hallar las dimensiones de la sala.
7. La edad de Juan Andrés es el doble de la de Federico. En 10 años la edad de Juan Andrés será 3 años más que la edad de Federico. ¿Cuáles son las edades actuales de Federico y Juan Andrés?
8. La suma de dos números es 220. Si se divide el primero entre 12 y el segundo entre 10, la suma de

los cocientes es 20. Hallar los números

9. Si el mayor de dos números se divide entre el menor, el cociente es 3 y el residuo es 3. Si el triple del mayor se divide entre el menor, el cociente es 10 y el residuo es 4. ¿Cuáles son los números?
10. Hace 6 años, Agustín era 4 veces mayor que pablo. Hallar sus edades actuales sabiendo que dentro de 4 años Agustín sólo será 2 veces mayor que Pablo.
11. La diferencia entre dos números es 67. Si el mayor se divide entre el menor el cociente es 14 y el residuo es 2. Hallar los números.
12. Ana le dice a su hija Beatriz: "Hace 7 años mi edad era 5 veces la tuya, pero ahora sólo es el triple". ¿Qué edad tiene cada una?

$$3x = 600$$