

1.- Resuelva el siguiente sistema y clasifíquelo atendiendo al número de soluciones

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 17 \\ 4x + 5y + z = 17 \end{cases}$$

A la vista del resultado anterior, ¿podemos afirmar que hay una ecuación que es combinación lineal de las otras dos?

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 17 & 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 + 10 - 4 - 12 + 5 - 2 = 0. \text{ Como } |1 \ 1 \ 1 \ 3| = 2 \neq 0, \text{ rg } A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 17 & 4 & 5 & 1 & 17 \end{pmatrix} \quad f_2 - 2f_1 \quad f_3 - 4f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 17 & 0 & 1 & -3 & 17 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ 1| = 1 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Conclusión: sí lo podemos afirmar porque como $\text{rg } A^* = 2$ sólo hay 2 filas l.i. Luego, la 3ª ecuación es c.l. de las otras dos.

2.- (prueba ordinaria) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $C = BA - A^t B^t$.

Resolución

$$C = BA - A^t B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -4 & -2 & 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & -1 & -2 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Halle la matriz X que verifique $ABX = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución

Llamando $D = AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ queda la ecuación $DX = E$.

Como $\det D = -3 \neq 0$, existe D^{-1} y

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} (\text{adj } D^t) = \frac{1}{-3} \text{adj} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por D^{-1} , por la izquierda, $D^{-1}DX = D^{-1}E$, $X = D^{-1}E$

$$X = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

3.- Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - z = 0 \\ -2y + z = 4 \end{cases}$

a) Resuélvalo y clasifíquelo en cuanto a sus soluciones.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 4 - 2 - 2 = 0. \text{ Como } |1 \ 1 \ 2 \ 0| = -2 \neq 0, \text{ rg } A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad f_2 - 2f_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 4 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad f_3 = f_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|1 \ 1 \ 0 \ -2| = -2 \neq 0$, $\text{rg } A^* = 2$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 2 < n^\circ$ de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, que corresponde al sistema $\{x + y - z = -2, -2y + z = 4\}$.

En la 2ª ecuación, $z = 4 + 2y$; en la 1ª ecuación, $x = -2 - y + z = -2 - y + 4 + 2y = 2 + y$.

Llamando $y = k$, las infinitas soluciones son $\{x = 2 + k, y = k, z = 4 + 2k\}$, con $k \in \mathbb{R}$.

b) ¿Tiene inversa la matriz de coeficientes del sistema? Justifíquelo.

Resolución

No, porque si tuviese inversa sería $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n^\circ$ de incógnitas, pues A^* contiene a A y sólo tiene dos filas y por el teorema de Rouché-Fröbenius sería un sistema compatible determinado en contraposición con el a)

c) Obtenga, si existe, una solución del sistema que verifique $x = 2y$.

Resolución

Como las infinitas soluciones son $\{x = 2 + k, y = k, z = 4 + 2k\}$, con $k \in \mathbb{R}$, si $x = 2y = 2k$ entonces $2k = 2 + k \Rightarrow k = 2$.

Sustituyendo $k = 2$, la solución es $\{x = 2 + 2, y = 2, z = 4 + 2 \cdot 2\}$. La solución que se pide es $x = 4, y = 2, z = 8$.

4.-

a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

De las siguientes operaciones, algunas no se pueden realizar; razone por qué. Efectúe las que se puedan realizar. $A + B$; $A^t + B$; AB ; AB^t .

Resolución

$A_{2 \times 3} + B_{3 \times 2}$ no se puede porque no tienen el mismo orden

$(A^t)_{3 \times 2} + B_{3 \times 2}$ sí se puede por tener el mismo orden y

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 2}$ sí se puede porque el n° de columnas de A coincide con el n° de filas de B

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$A_{2 \times 3} \cdot (B^t)_{2 \times 3}$ no se puede porque el n° de columnas de A no coincide con el n° de filas de (B^t)

b) Resuelva y clasifique, atendiendo al número de soluciones, el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\det A = 2 + 9 - 12 - 1 = -2 \neq 0$. Luego, $\text{rg } A^* = \text{rg } A = 3 = n^\circ$ de incógnitas y por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

$$A^* = (2 \ 1 \ 3 \ 3 \ 1 \ 0 \ 2 \ 2 \ 1 \ 3 \ 1 \ -1)f_1 - 2f_3 \quad f_2 - f_3 \quad (0 \ -5 \ 1 \ 5 \ 0 \ -3 \ 1 \ 3 \ 1 \ 3 \ 1 \ -1)f_1 - f_2 \quad (0 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

que corresponde al sistema $\begin{cases} y = -1 \\ -3y + z = 3x + 3y + z = -1 \end{cases}$. Como $y = -1$, sustituyendo $-3(-1) + z = 3$, $z = 0$

Sustituyendo en la última ecuación, $x + 3(-1) + 0 = -1$, $x = 2$.

La solución del sistema es $x = 2, y = -1, z = 0$

5.- (prueba extraordinaria) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & x \end{pmatrix}$

a) Determine el valor de x en la matriz B para que se verifique la igualdad $AB = BA$.

Resolución

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3x - 1 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & x \end{pmatrix}. \text{ Igualando los términos, } 3x - 1 = 5, x = 2$$

b) Obtenga la matriz C tal que $A^t C = I_2$.

Resolución

Llamando $B = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ queda $BC = I$. Como $\det B = 1 \neq 0$, existe B^{-1} y

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{adj} B^t) = \frac{1}{1} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por B^{-1} , por la izquierda, $B^{-1}BX = B^{-1}I$, $X = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

6.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si existe, la matriz inversa de B .

Resolución

Como $\det B = -2 \neq 0$, existe B^{-1} y

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{adj} B^t) = \frac{1}{-2} \text{adj} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Si $AB = BA$ y $A + A^t = 3I_2$ calcule x e y .

Resolución

$$\text{Como } A + A^t = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Igualando términos, } 2x = 3, x = \frac{3}{2}$$

Como

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & -y & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y - x & 2x & x + y & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -2y & 2x & -y \end{pmatrix}.$$

Igualando términos,

$$\begin{cases} y - x = -x - 2y \\ 2x = 2x - y \\ x + y = x - 2y \\ -2y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}. \text{ Por tanto, } y = 0.$$

$$\text{Conclusión: } x = \frac{3}{2}, y = 0$$