

ETUDE DE QUELQUES PHENOMENES ASSOCIES AUX MATERIAUX SUPRACONDUCTEURS

Partie A: Effet Meissner. Champ magnétique à l'intérieur du matériau supraconducteur.

1: On prend comme système un porteur de charge, en référentiel galiléen, soumis à la force électromagnétique $\vec{f} = e\vec{E} + e\vec{v}_s \wedge \vec{B}$ et à son poids $m\vec{g}$, ce dernier étant négligé.

On néglige de plus le terme magnétique, on obtient alors en appliquant le PFD: $m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = e\vec{E}$.

D'autre part, par définition $\vec{j} = n_s e \vec{v}_s$.

$$\vec{E} = \frac{m}{n_s e^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \text{ si l'on a posé: } \lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}.$$

En combinant les deux relations, il vient:

Homogénéité: $[H] = [J] [C^{-2}] [s^2] = [kg] [m^2] [C^{-2}]$

Et λ est homogène à des $[kg^{1/2}] [H^{-1/2}] [m^2] [C^{-1}] = [kg^{1/2}] [kg^{-1/2}] [m^{-1}] [C] [m^2] [C^{-1}]$

En conclusion, λ est homogène à des $[m]$, soit à une longueur.

Application numérique: $\lambda \approx 1,25 \cdot 10^{-8} m$

2: Equations de Maxwell en régime quasi-stationnaire, matériau neutre:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 & \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \text{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{E}$; puis $\text{rot} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) \right] = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On peut permuter l'opérateur rotationnel et la dérivée par rapport au temps: $\frac{\partial}{\partial t} \left[\text{rot} (\text{rot} \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right] = 0$.

3: Sachant que $\text{div} \vec{B} = 0$, on obtient immédiatement en utilisant la relation vectorielle indiquée:

$$-\Delta \vec{B} + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = 0 \quad \text{soit l'équation dite "de London":} \quad \Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = 0.$$

4: On cherche une solution du type $\vec{B} = B_z(y) \vec{u}_z$; alors on peut écrire $\Delta \vec{B} = \frac{\partial^2 B_z(y)}{\partial y^2} \vec{u}_z$

D'où $\frac{\partial^2 B_z(y)}{\partial y^2} \vec{u}_z - \frac{B_z(y)}{\lambda^2} \vec{u}_z = 0$, soit $\frac{\partial^2 B_z(y)}{\partial y^2} - \frac{B_z(y)}{\lambda^2} = 0$, équation différentielle qui s'intègre en:

$$B_z(y) = \alpha \cosh\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \beta \sinh\left(\frac{y}{\lambda}\right) \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \text{ deux constantes d'intégration.}$$

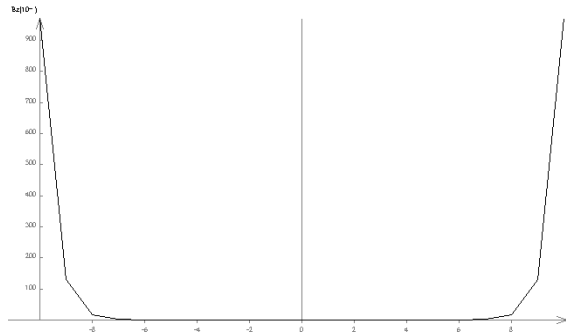
5: En absence de courants surfaciques, il y a continuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$; on en déduit les conditions aux limites: $B_z(d) = B_z(-d) = B_0$.

Et donc α et β doivent vérifier:
$$\begin{cases} \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) + \beta \operatorname{sh}\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \\ \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{d}{\lambda}\right) - \beta \operatorname{sh}\left(\frac{d}{\lambda}\right) = B_0 \end{cases}$$
 ; ainsi on obtient
$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \frac{B_0}{\operatorname{ch}(d/\lambda)} \end{cases}$$
 et

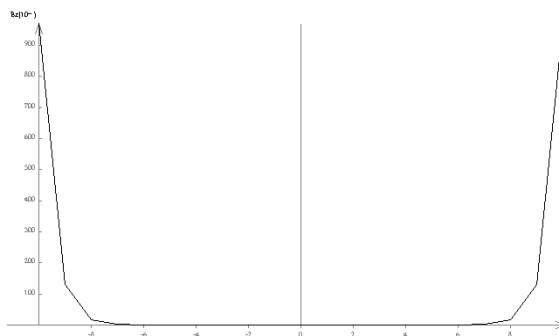
l'expression de $B_z(y) = \frac{B_0}{\operatorname{ch}(d/\lambda)} \operatorname{ch}\left(\frac{y}{\lambda}\right)$.

Dans le cas où $\lambda \ll d$, $B_z(0) \approx 0$

De plus, $B_z(y)$ est non nul sur une distance à partir des interfaces de l'ordre de λ :
en effet, $B_z(d - \lambda) \approx 0,36 B_0$.

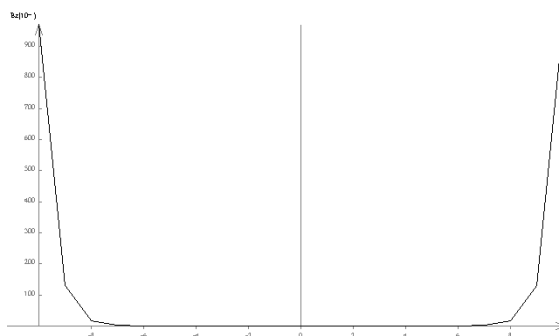


6: On se sert de la relation INCORPORER



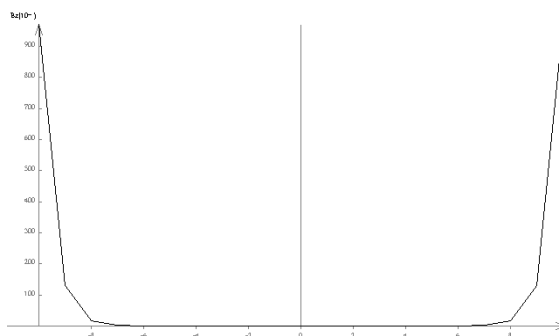
Equation.DSMT4

, ainsi INCORPORER



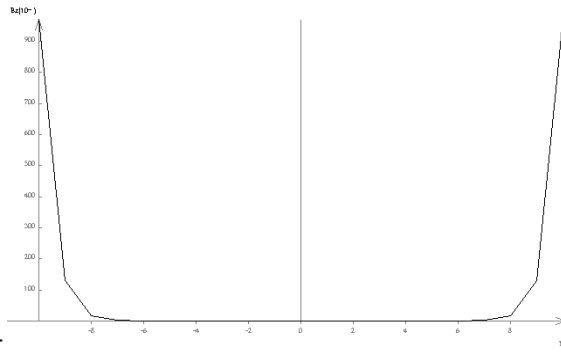
Equation.DSMT4

et donc INCORPORER



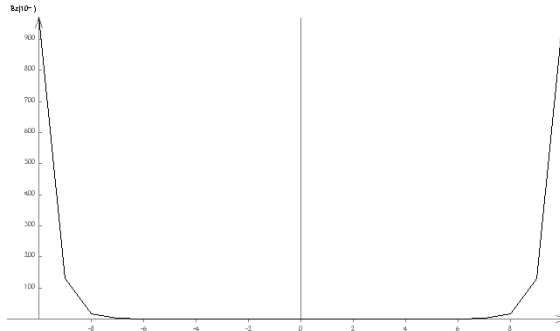
Equation.DSMT4

avec INCORPORER



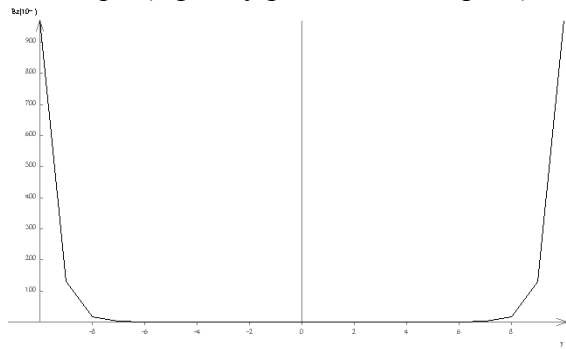
Equation.DSMT4

.On obtient ainsi

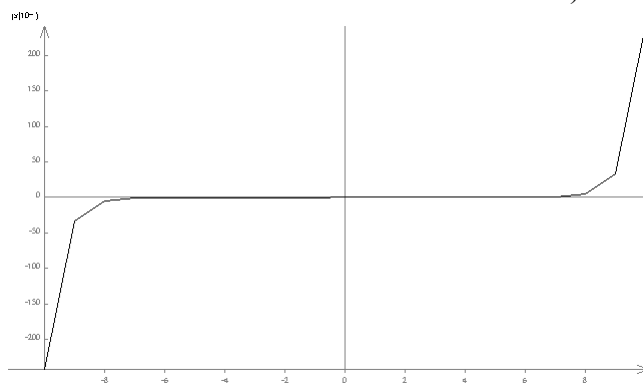
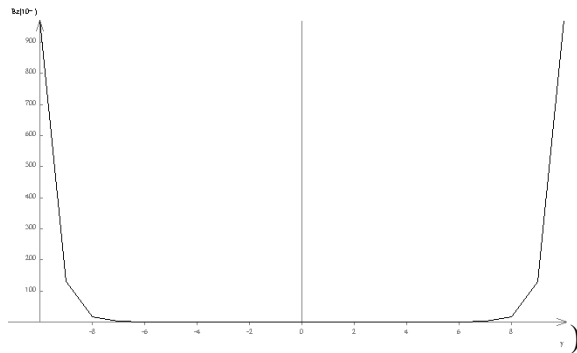


INCORPORER Equation.DSMT4

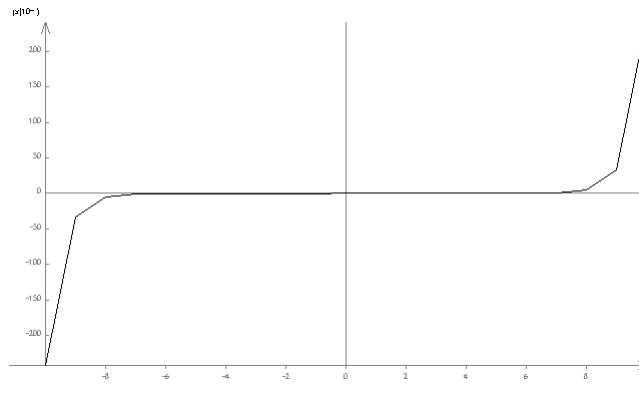
Dans le cas où $\ll d, j_{xy}$ est non nul uniquement près des interfaces courants quasiment surfaciques); pour y proche de d resp. $-d$)



resp. INCORPORER Equation.DSMT4



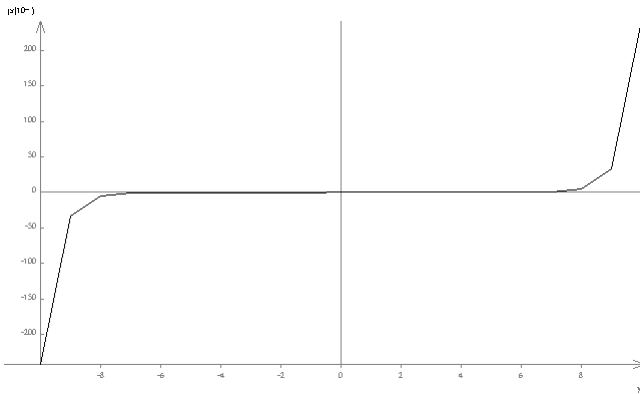
7.a- On suppose que les résultats précédents restent valables, la densité de courants étant à présent considérée comme une densité de courants d'aimantation. On



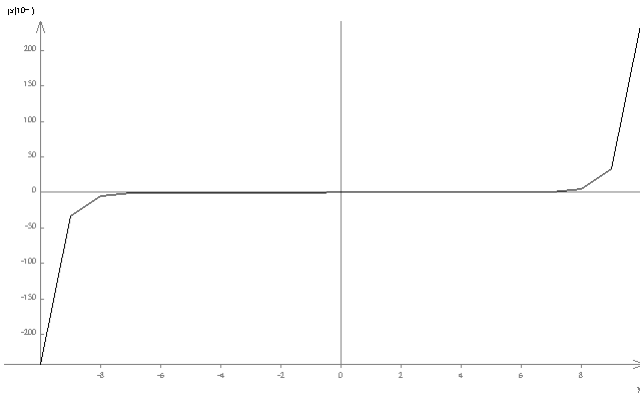
calculer INCORPORER Equation.DSMT4 γ ; soit



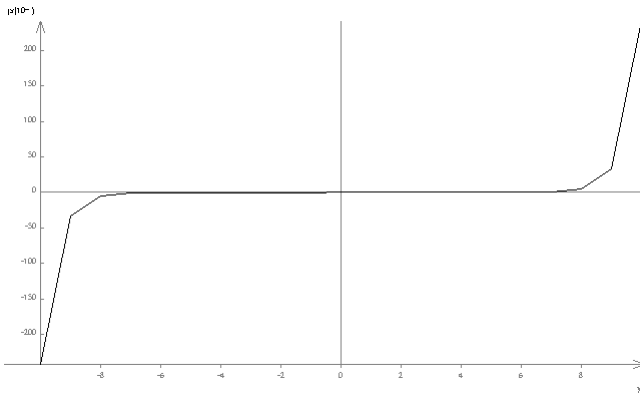
INCORPORER Equation.DSMT4 γ .7.b-



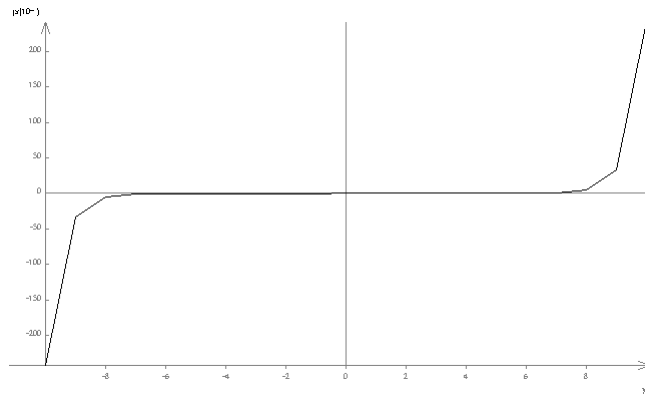
INCORPORER Equation.DSMT4 γ avec



INCORPORER Equation.DSMT4 γ et

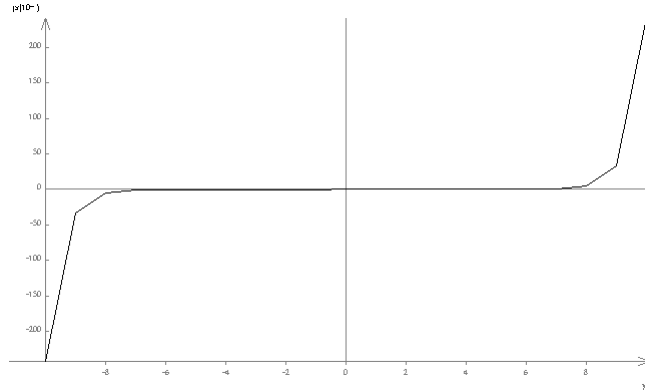


INCORPORER Equation.DSMT4 γ .Avec



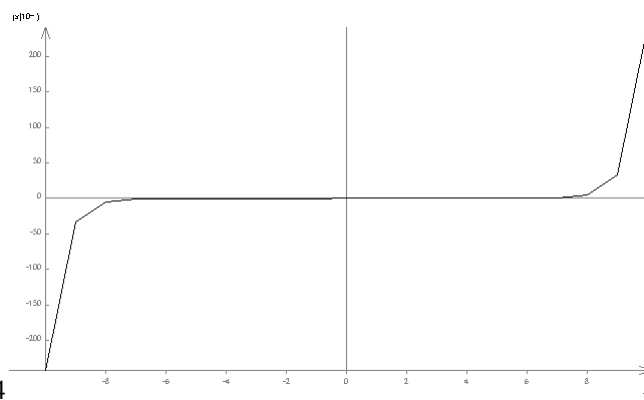
INCORPORER Equation.DSMT4

, la condition



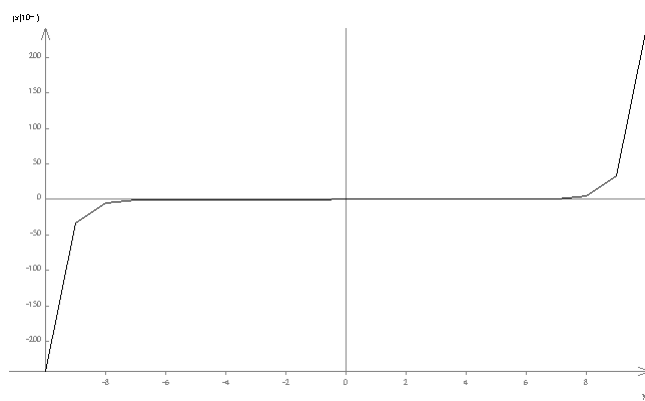
INCORPORER Equation.DSMT4

implique que



INCORPORER Equation.DSMT4

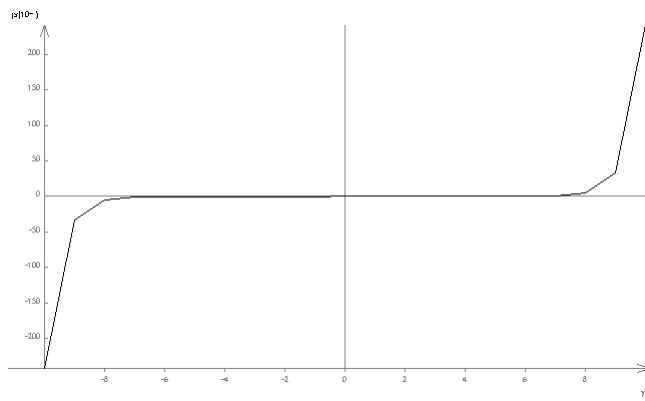
. Dans le vide,



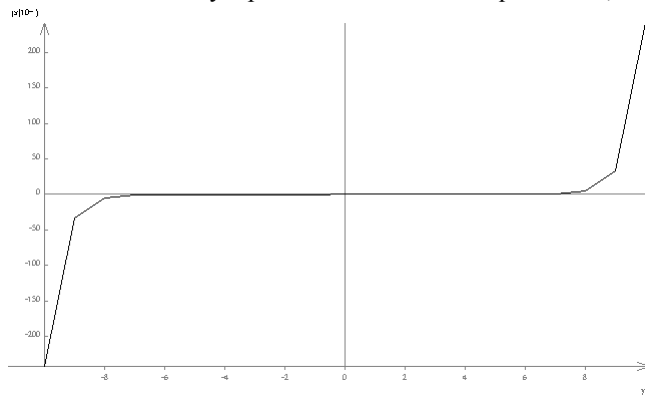
INCORPORER Equation.DSMT4

dans le cas

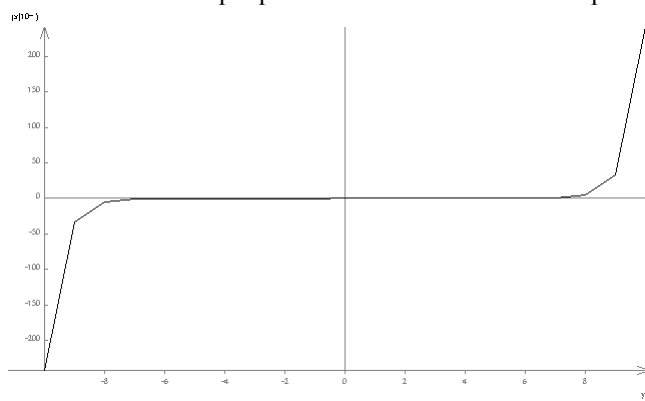
présent, et il y a continuité de la composante tangentielle de INCORPORER Equation.DSMT4



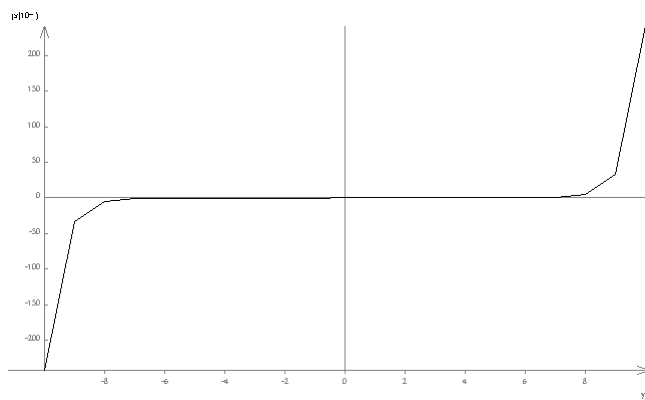
s'il n'y a pas de courants surfaciques libres, on en



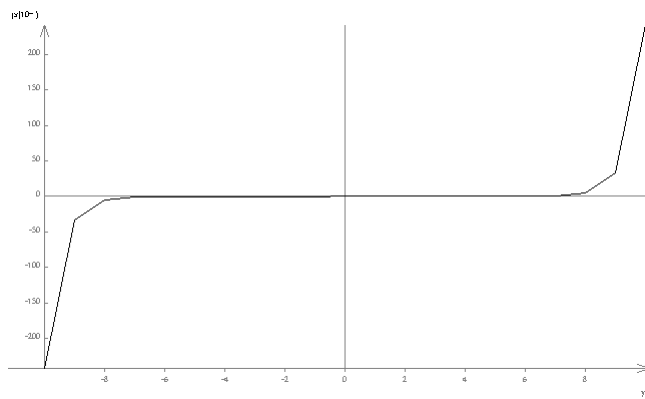
déduit que INCORPORER Equation.DSMT4
tout l'intérieur de la plaque. Et donc INCORPORER Equation.DSMT4 dans



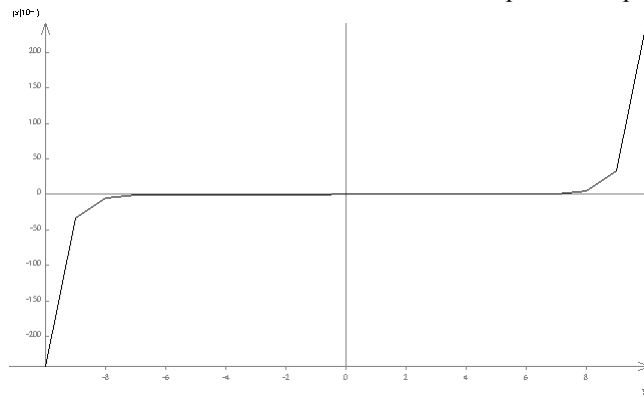
.7.c- INCORPORER Equation.DSMT4



; on en déduit INCORPORER Equation.DSMT4

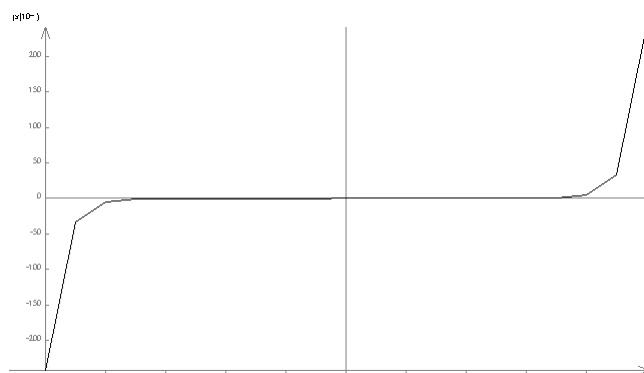


.On définit une susceptibilité m par



INCORPORER Equation.DSMT4

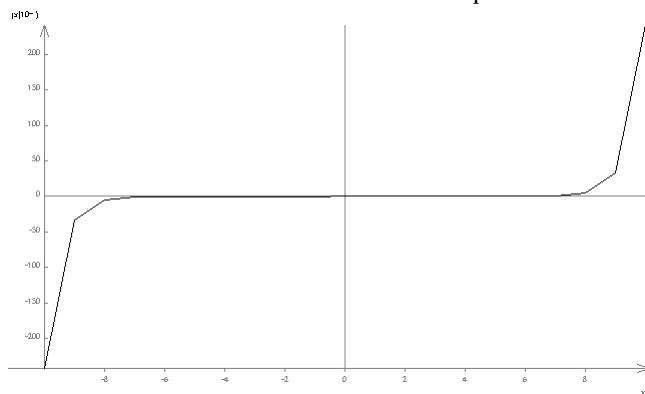
, soit



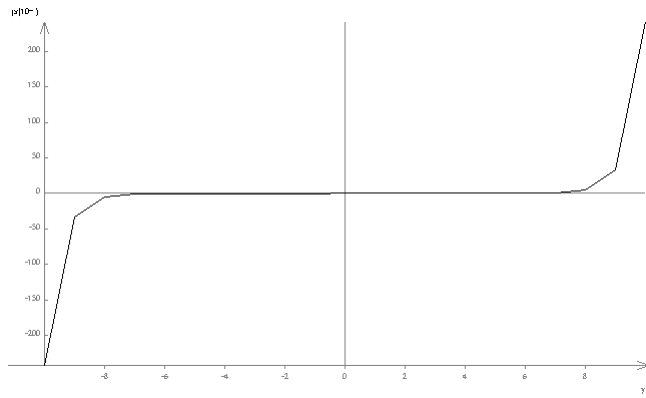
INCORPORER Equation.DSMT4

.thx < x pour

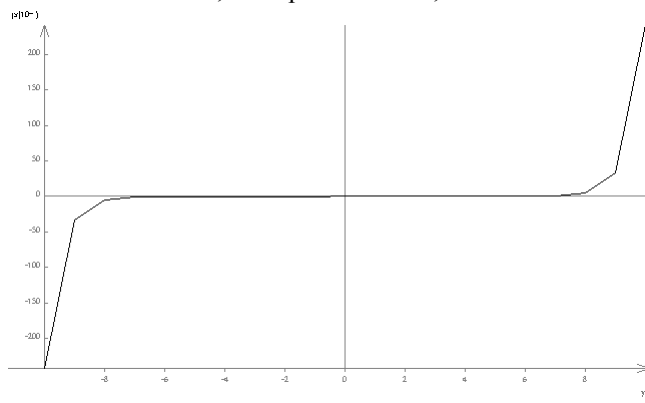
tout $x > 0$, on a donc $m < 0$: milieu diamagnétique. Si $d \gg$, $m \rightarrow -1$: diamagnétique parfait. Si $d \ll$, $m \rightarrow 0$: aimantation de plus en plus faible, on perd toutes les propriétés du matériau, qui doit donc avoir une certaine épaisseur. Partie B: Etude thermodynamique de la transition de phase. 1: Le premier principe de la thermodynamique donne $dU = Q + W$ avec en réversible $Q = TdS$ et $W = -PdV + 0HdM$ mais comme on néglige les variations de volume: $W = 0HdM$. On a donc bien $dU = TdS + 0HdM$. 2: $dG = dU - TdS - SdT - 0HdM - 0MdH$, donc en remplaçant dU : $dG = -SdT - 0MdH$. 3: Dans la phase normale: $M = 0$; alors $dG = -SdT = 0$ à T cte. On en déduit que $G_N(H, T) = G_N(0, T)$. 4: Dans la phase supraconductrice: $M = -H$; alors $dG = -SdT + 0HdH = 0HdH$ à T cte. On en déduit que



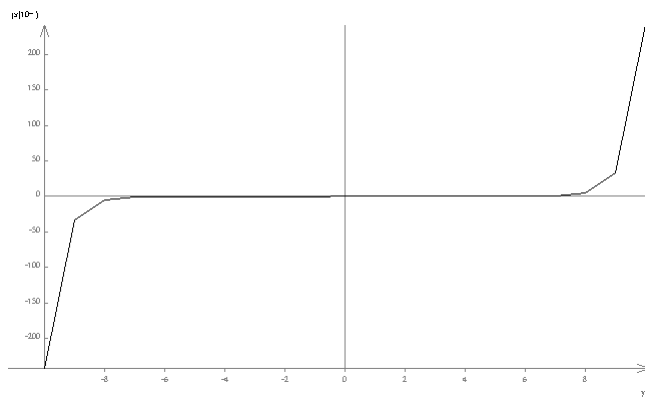
.5: D'après l'énoncé, on a évidemment $G_N(H, T) = G_S(H, T)$. On remplace alors dans les expressions précédentes, sachant de plus qu'à la transition, $H = H_c(T)$. On en



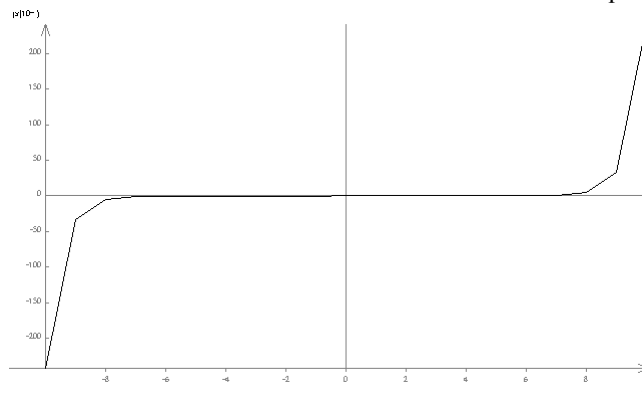
déduit que INCORPORER Equation.DSMT4
 $dG = -SdT - 0MdH$, donc par définition, INCORPORER Equation.DSMT4 .6:



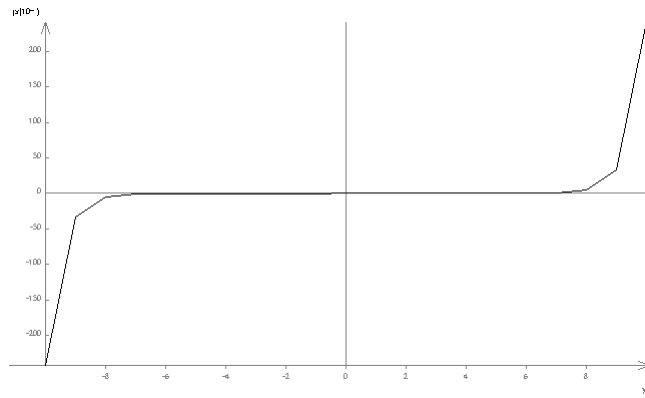
. INCORPORER Equation.DSMT4



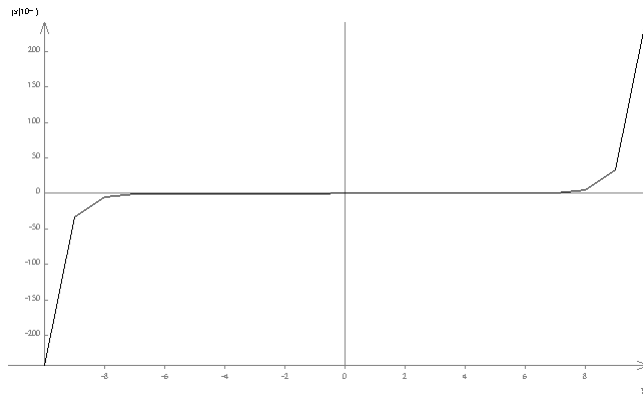
.On en déduit que INCORPORER



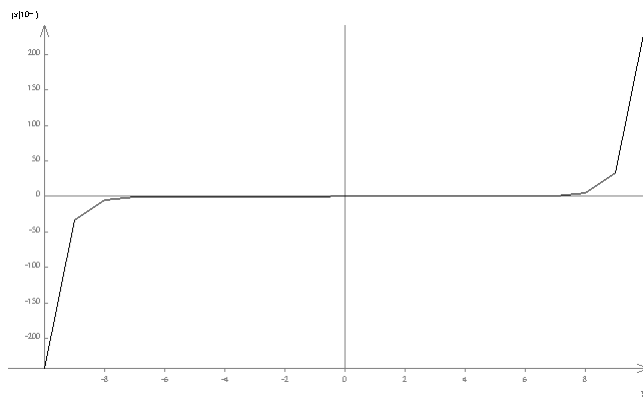
Equation.DSMT4 .En particulier, on a



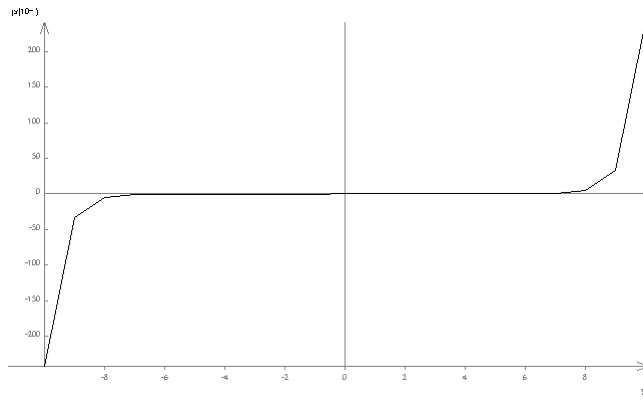
INCORPORER Equation.DSMT4
précédente ne dépend en fait pas de H.De même INCORPORER Equation.DSMT4 car l'expression



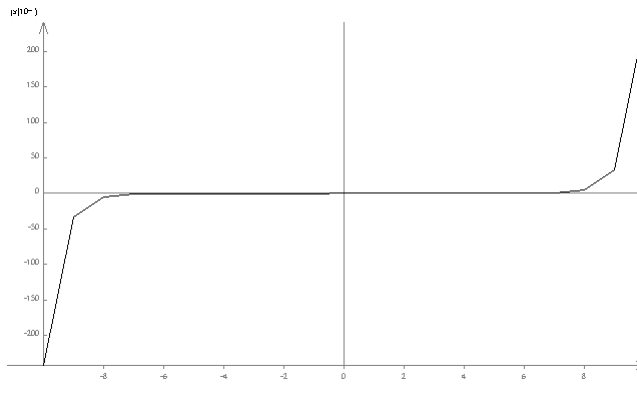
.D'où INCORPORER Equation.DSMT4



.Finalement, INCORPORER Equation.DSMT4

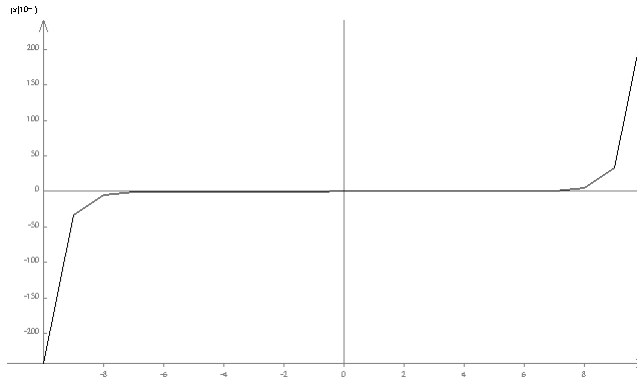


.7: Par définition, INCORPORER



Equation.DSMT4

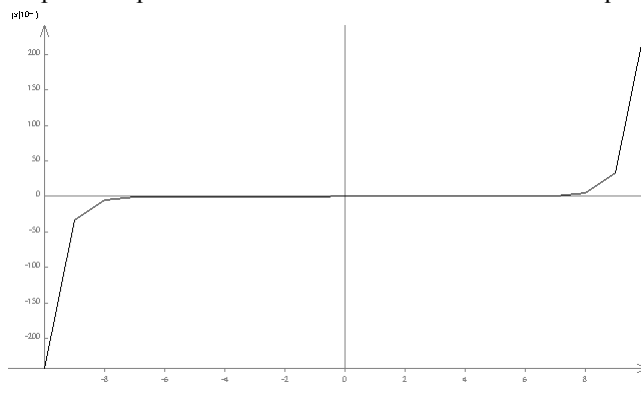
, soit INCORPORER



Equation.DSMT4

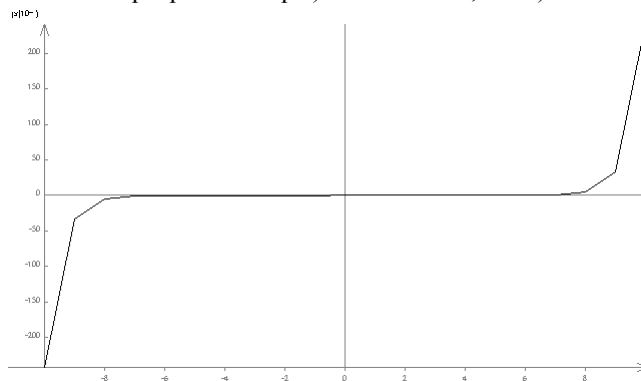
Il suffit alors de remplacer avec

l'expression précédemment obtenue: INCORPORER Equation.DSMT4



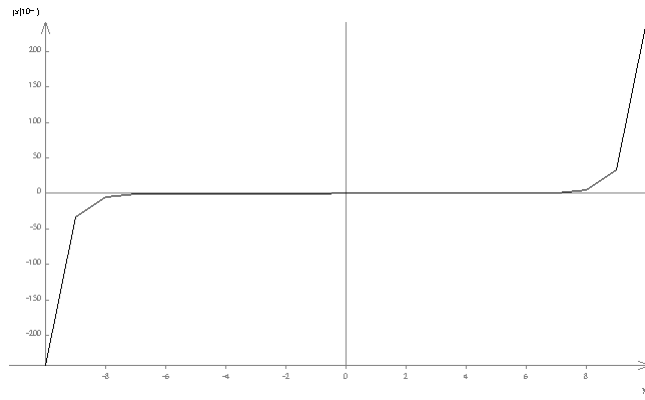
γ

.Pour $T = T_C$, $H_C = 0$, par suite $L = 0$, la transition est adiabatique point critique).Pour $T < T_C$, $H_C(T) > 0$ et INCORPORER Equation.DSMT4

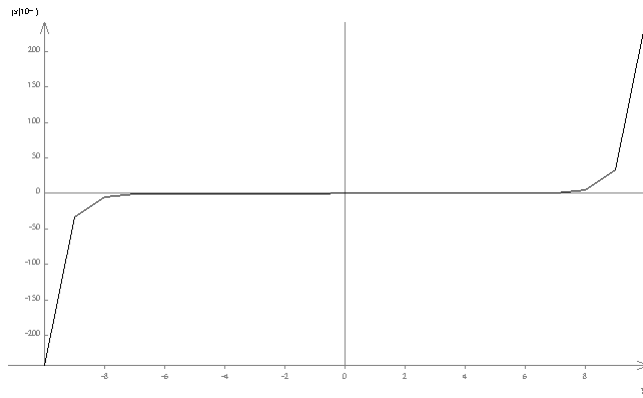


γ

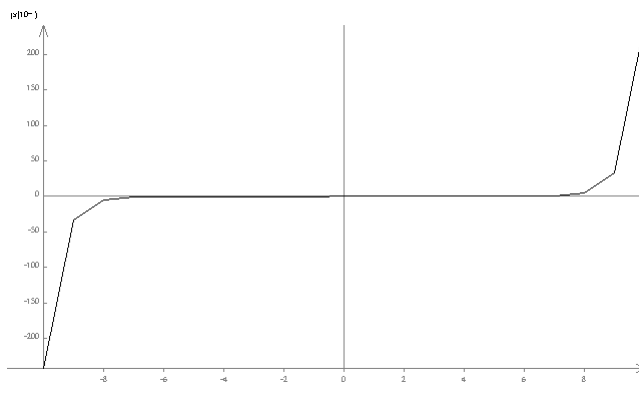
, par suite $L > 0$: transition isotherme où il faut chauffer changement d'état).8: Pour une transformation réversible, on peut écrire $Q = cdT + ldH$, soit



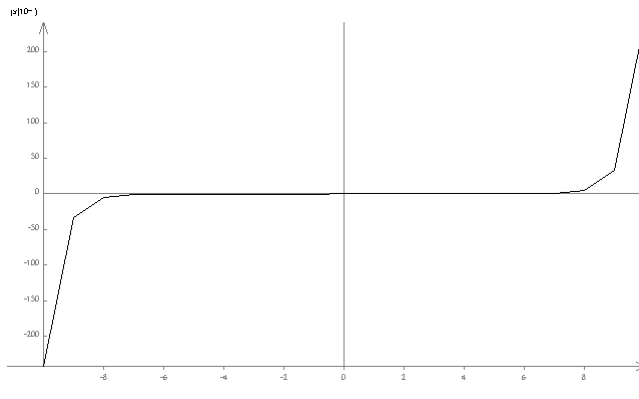
INCORPORER Equation.DSMT4
capacité thermique à H constant: INCORPORER Equation.DSMT4



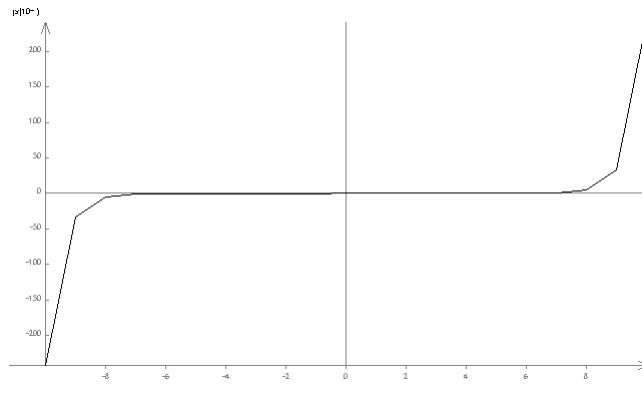
dans ce cas.D'où INCORPORER



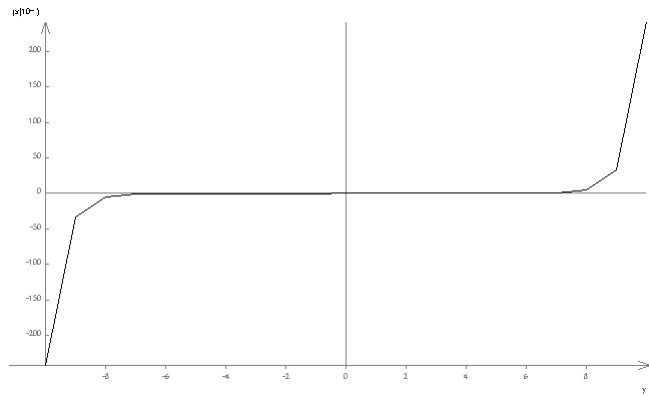
Equation.DSMT4 , soit INCORPORER



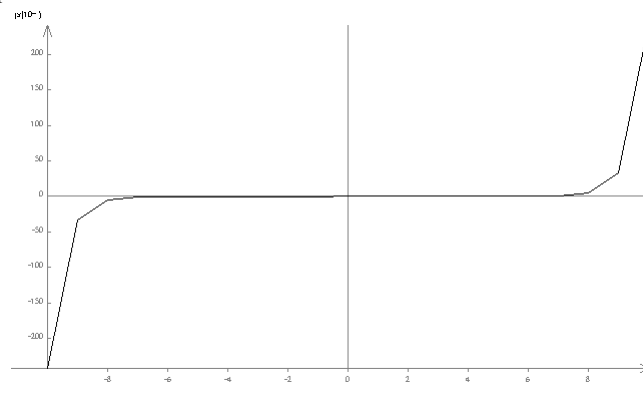
Equation.DSMT4 .Pour $T = T_C$, INCORPORER



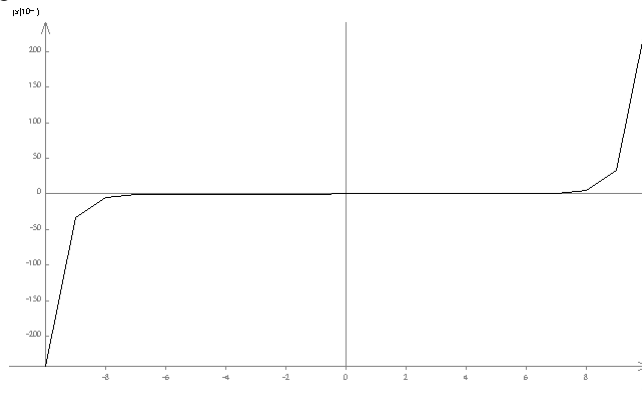
Equation.DSMT4 .Partie C: Dynamique de
 pénétration de la phase Normale dans la phase Supraconductrice à la transition.1: Equations de Maxwell dans la



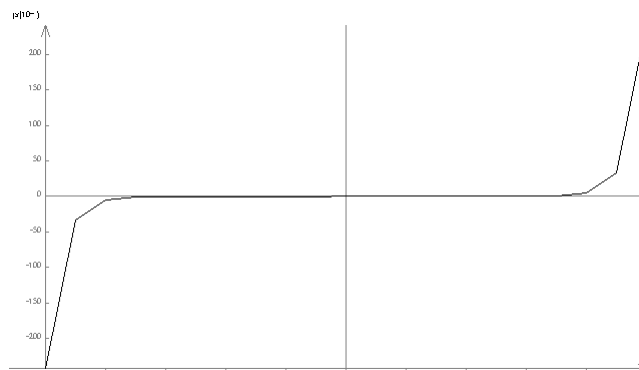
partie normale: INCORPORER Equation.DSMT4



INCORPORER Equation.DSMT4 INCORPORER

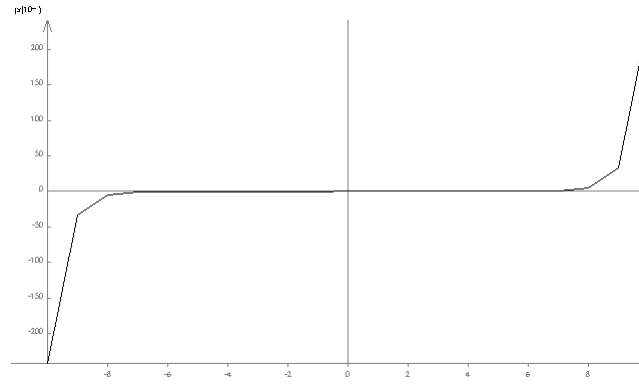


Equation.DSMT4 INCORPORER



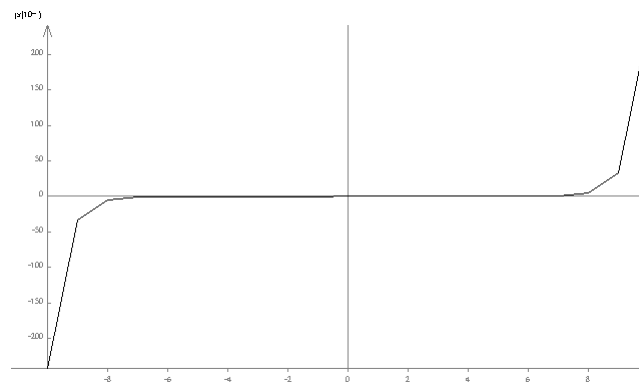
Equation.DSMT4

Loi d'Ohm locale:



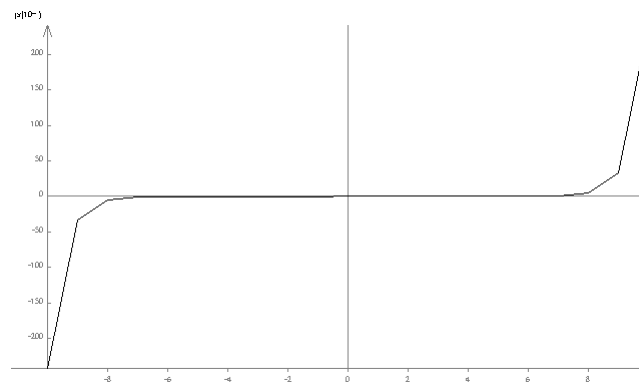
INCORPORER Equation.DSMT4

.On calcule



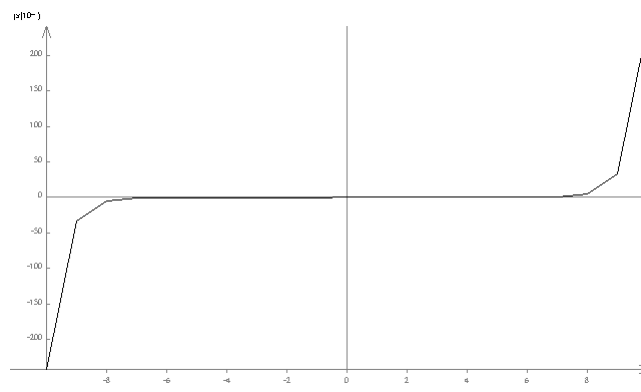
INCORPORER Equation.DSMT4

, soit



INCORPORER Equation.DSMT4

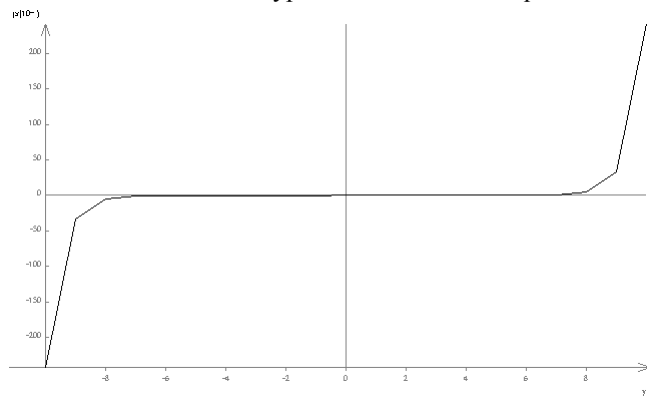
.2: : Sachant



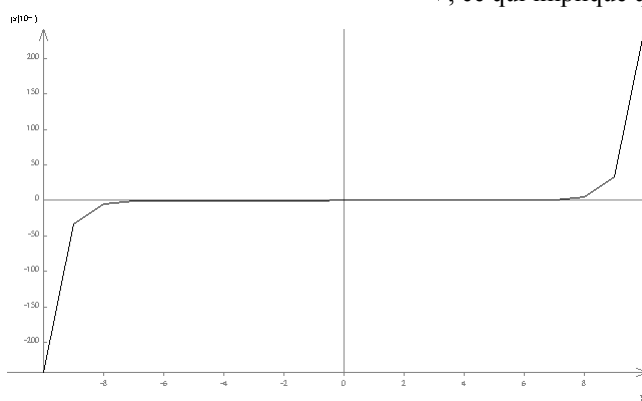
que INCORPORER Equation.DSMT4

, et que l'on

cherche une solution du type INCORPORER Equation.DSMT4



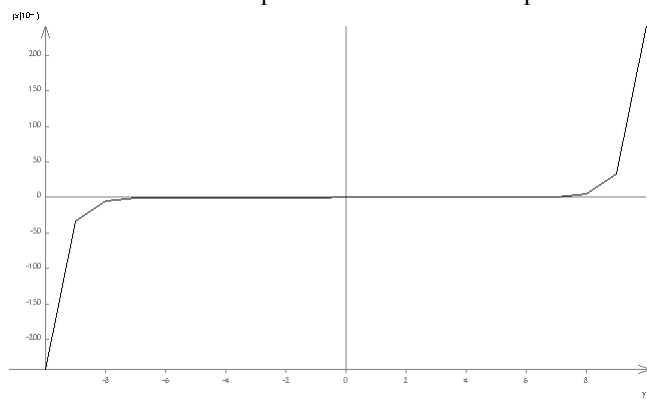
, ce qui implique que INCORPORER



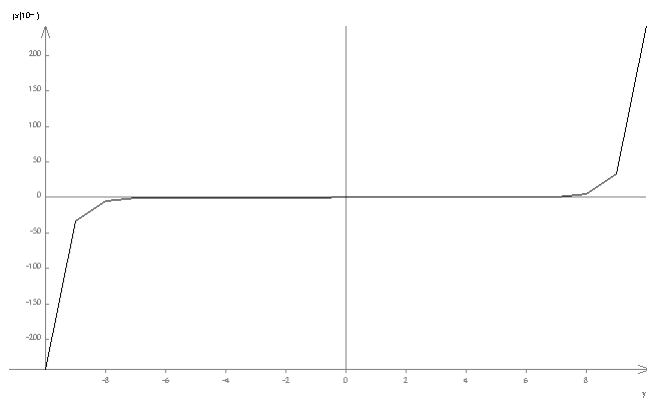
Equation.DSMT4

relation vectorielle indiquée: INCORPORER Equation.DSMT4

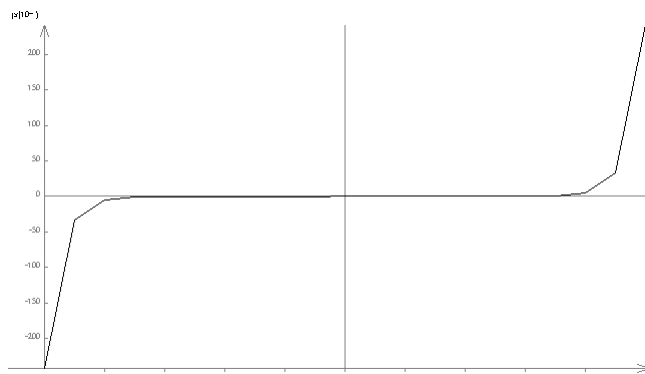
; on obtient en utilisant la



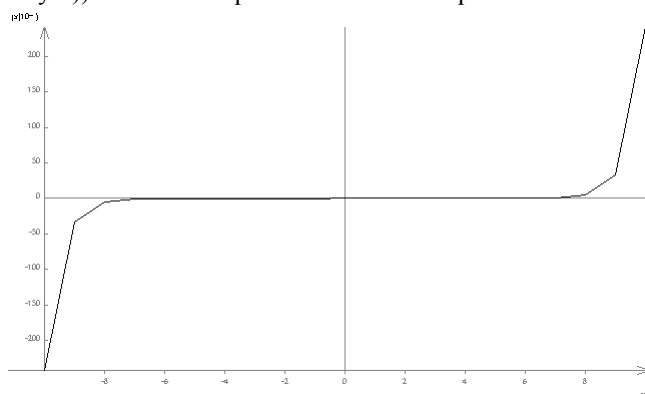
puis INCORPORER Equation.DSMT4



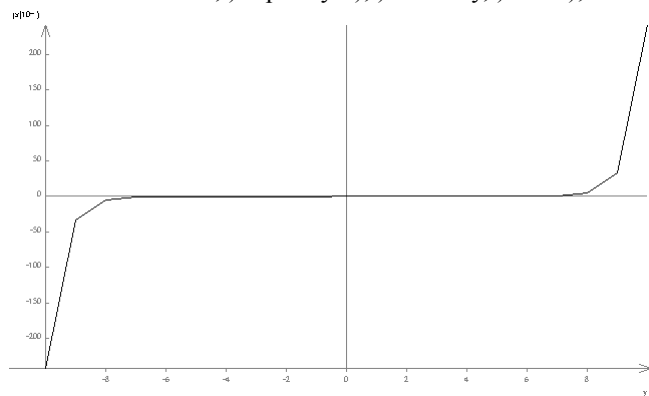
.3: Conditions aux limites: en $y = 0$, en l'absence de courants surfaciques vrais, il y a continuité de la composante tangentielle de INCORPORER Equation.DSMT4



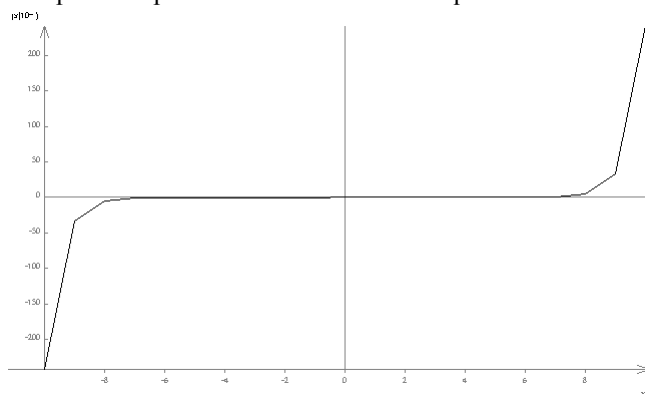
, donc $BZ(0) = BZ_{vide}$ en $y = y(0t)$, il y a transition, $BZy(0t)) = BC$. 4: L'équation différentielle précédente se transforme en INCORPORER Equation.DSMT4



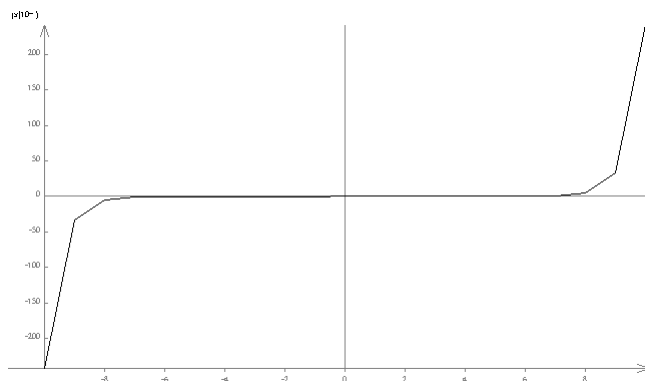
avec $f_0(t) = p$ et $f_y(0t), t) = 0.5: f_y(t) = FY$; on



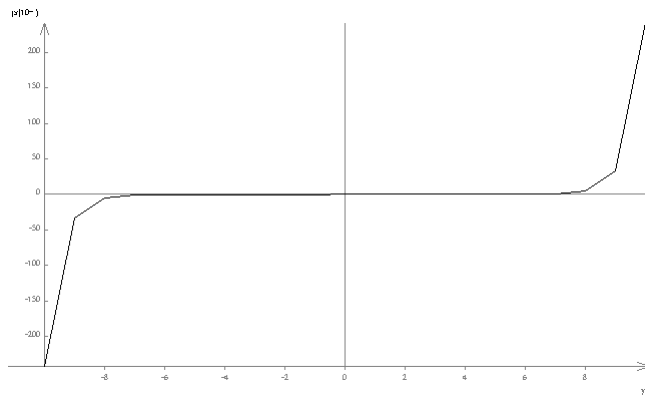
obtient ainsi INCORPORER Equation.DSMT4 et en répétant l'opération INCORPORER Equation.DSMT4



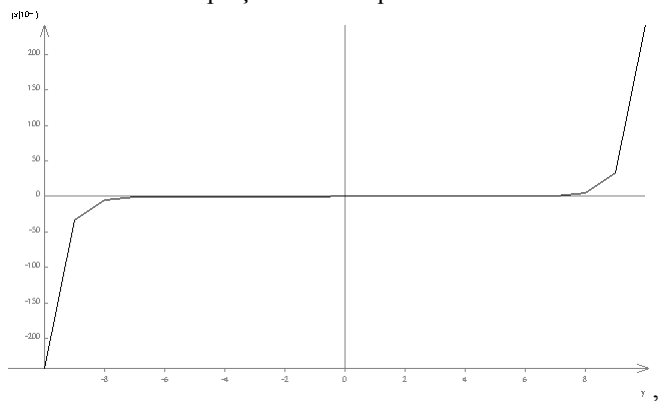
.Et INCORPORER Equation.DSMT4



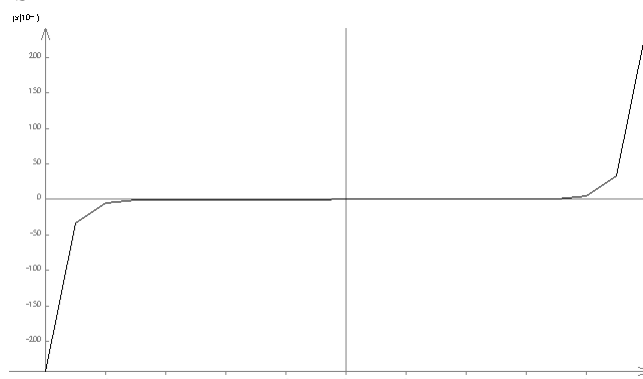
, ou encore INCORPORER Equation.DSMT4



.En remplaçant dans l'équation différentielle

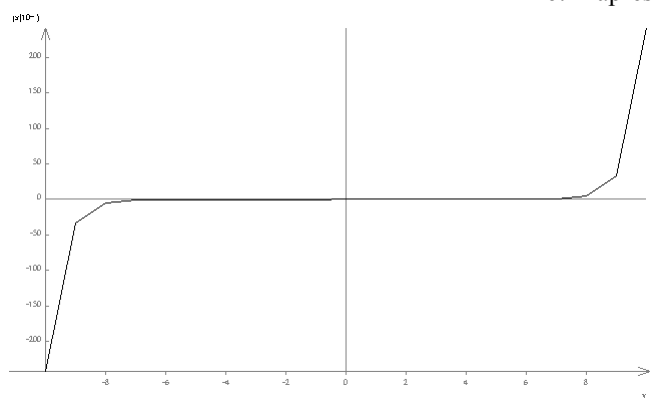


obtenue en 4: INCORPORER Equation.DSMT4



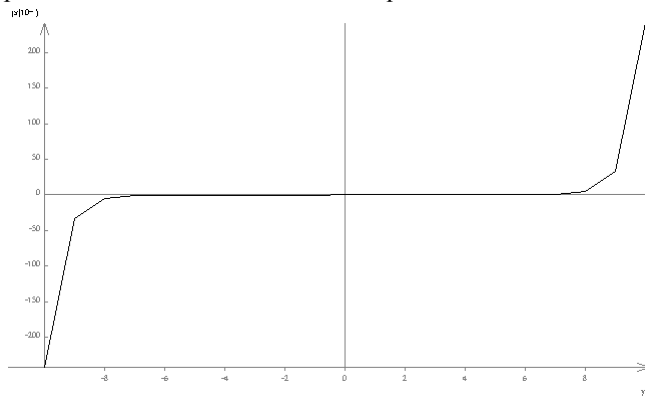
donc: INCORPORER Equation.DSMT4

, 6: D'après

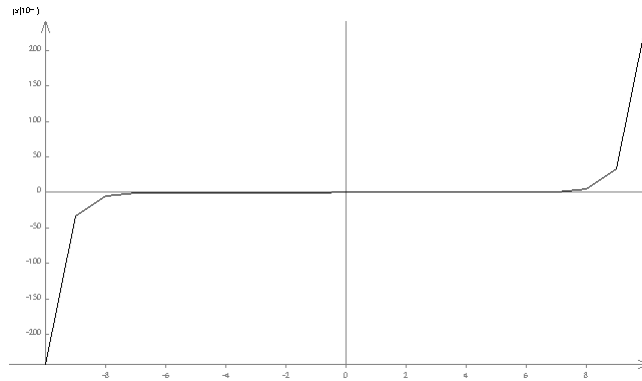


ce qui précède, INCORPORER Equation.DSMT4

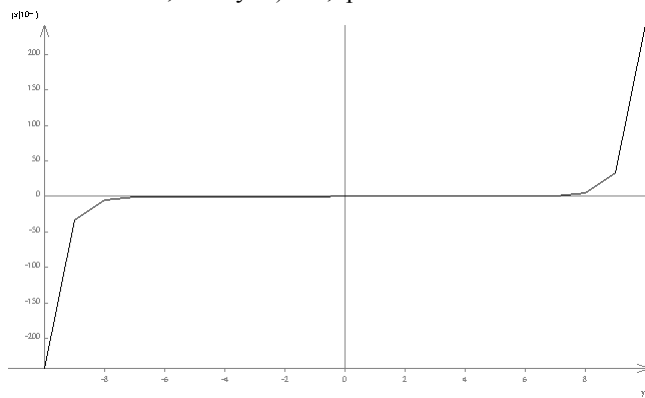
Par hypothèse d'énoncé, le membre de droite ne dépendrait pas de t , de plus FY) et Y sont sans dimensions, on peut ainsi écrire INCORPORER Equation.DSMT4



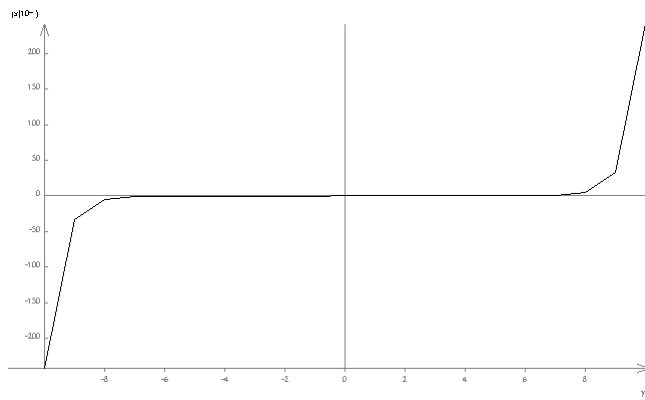
, ce qui donne en intégrant: INCORPORER



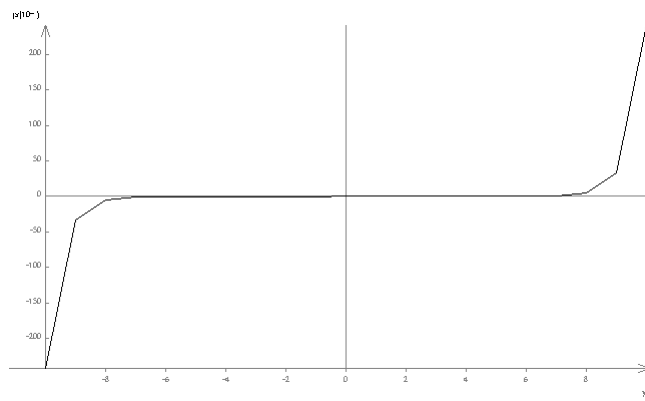
Equation.DSMT4
 constante. Unité de : $[m^2] [s^{-1}] [H] [m^{-1}] [-1] [m^{-1}]$ et comme $[H] [-1] = [s]$, est sans dimension. On intègre encore une fois, avec $y(0) = 0$, pour obtenir INCORPORER Equation.DSMT4



. 7: INCORPORER Equation.DSMT4

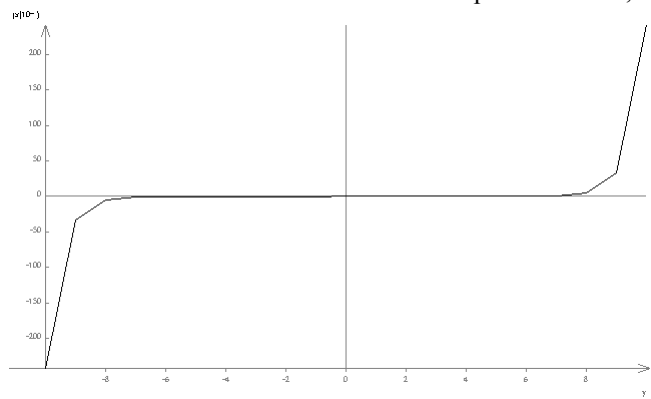


, on en déduit que INCORPORER

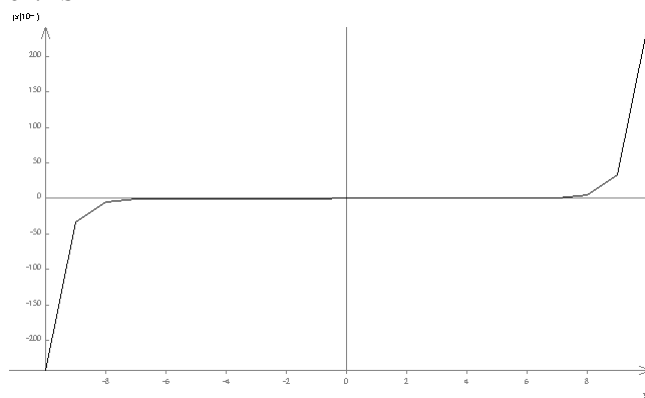


Equation.DSMT4

.8a- Dans le supraconducteur,

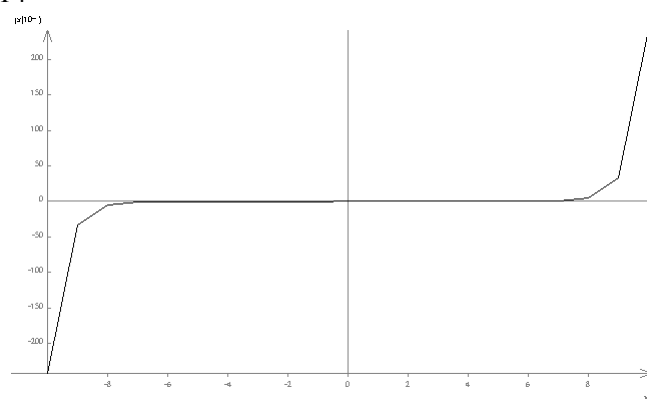


par hypothèse, INCORPORER Equation.DSMT4



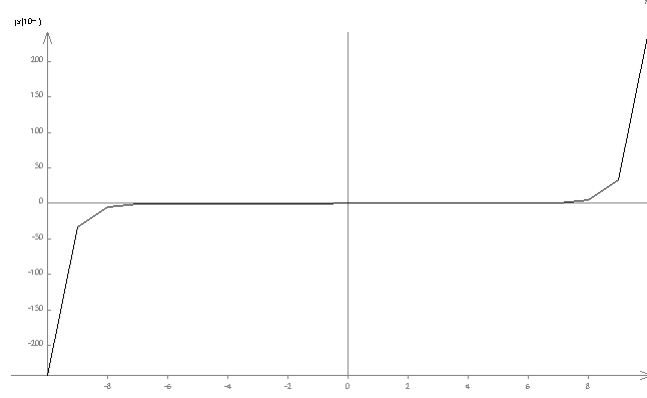
et INCORPORER Equation.DSMT4

.De plus,



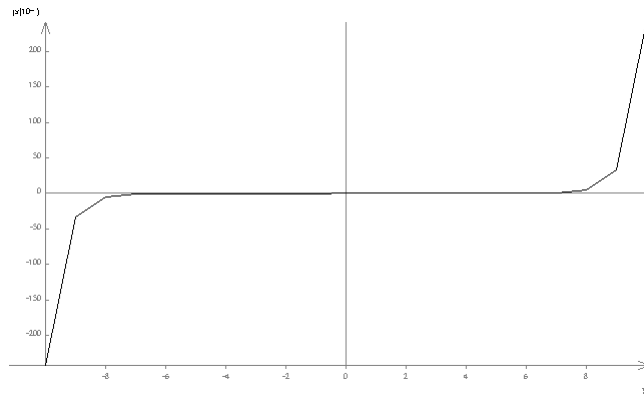
INCORPORER Equation.DSMT4

, donc

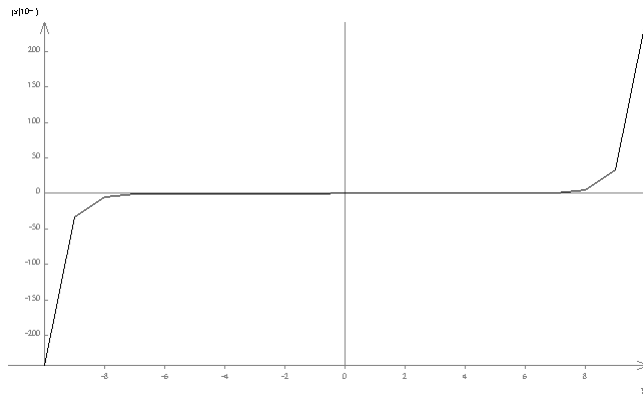


INCORPORER Equation.DSMT4

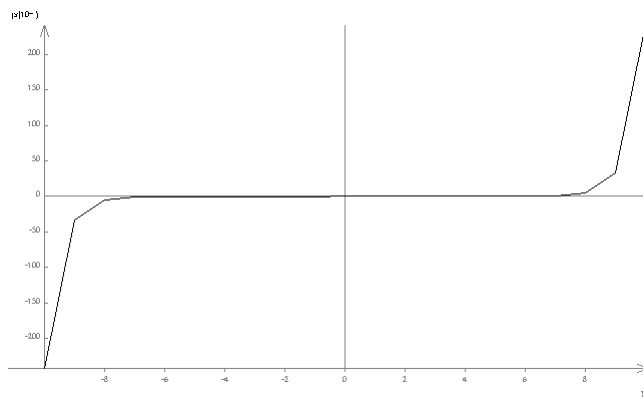
et ainsi



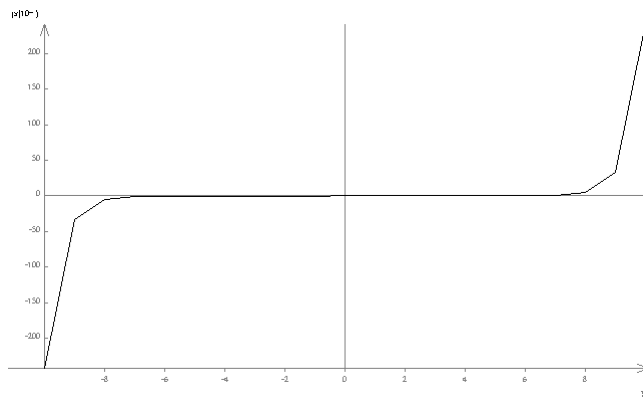
INCORPORER Equation.DSMT4
 dans le supraconducteur. On admet qu'il est nul. Dans la phase normale, INCORPORER Equation.DSMT4



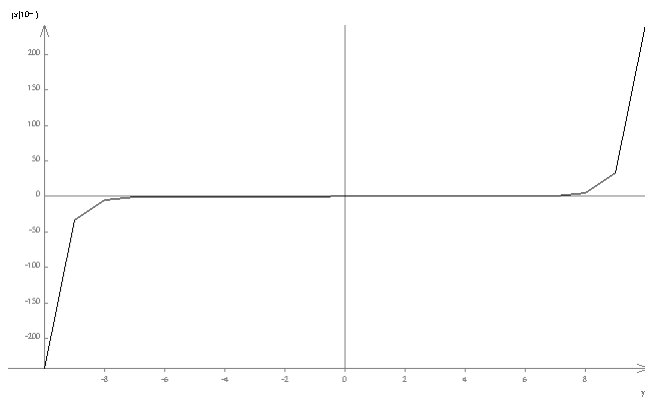
, par suite INCORPORER Equation.DSMT4



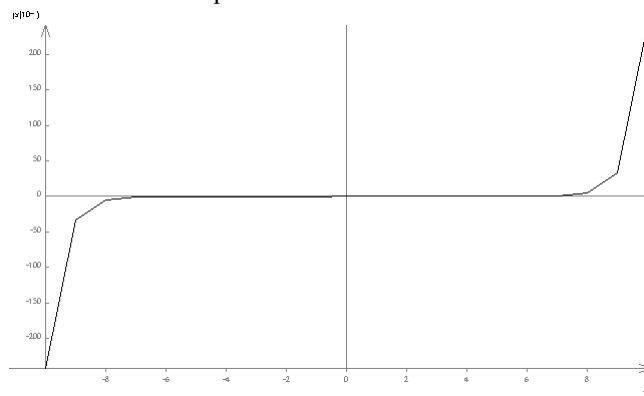
ou INCORPORER Equation.DSMT4



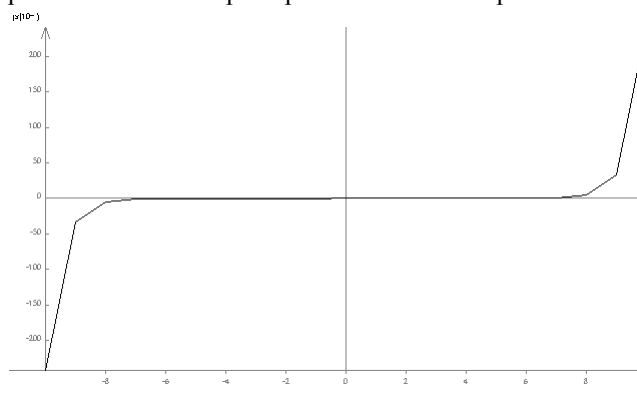
.8b- On peut imaginer le contour comme un cadre plongeant d'une région où règne un champ magnétique dedans une région à champ nul, alors en orientant le contour dans le sens ABCD, il apparaît une force électromotrice induite INCORPORER Equation.DSMT4



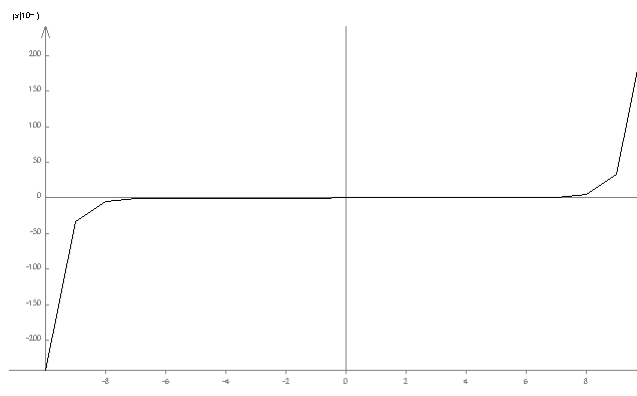
.On pouvait aussi raisonner sur les variations de



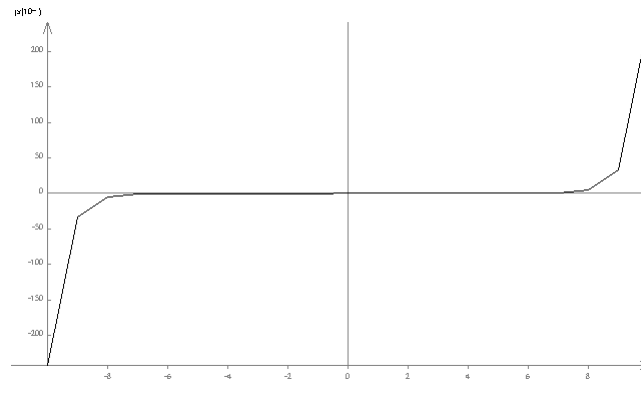
flux.D'où INCORPORER Equation.DSMT4
comme le champ électrique dans la phase normale ne dépend pas de x invariance par translation), et



INCORPORER Equation.DSMT4 , d'où finalement

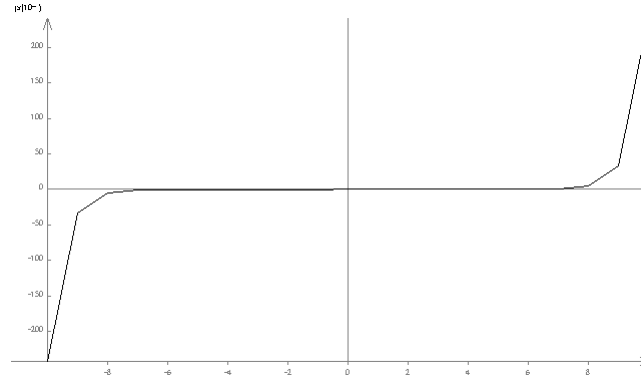


INCORPORER Equation.DSMT4 .On obtient



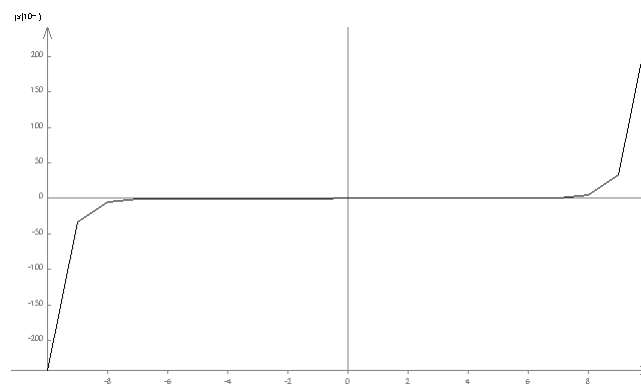
INCORPORER Equation.DSMT4

, d'où



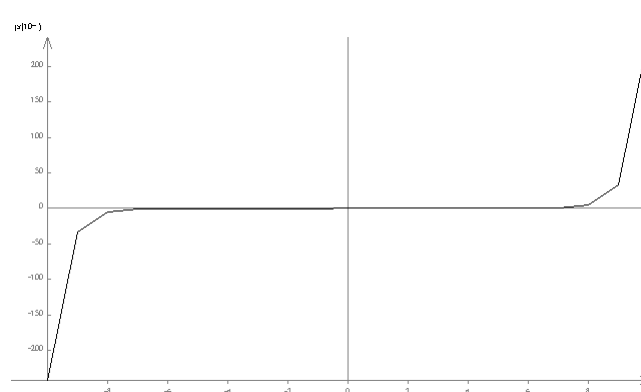
INCORPORER Equation.DSMT4

et



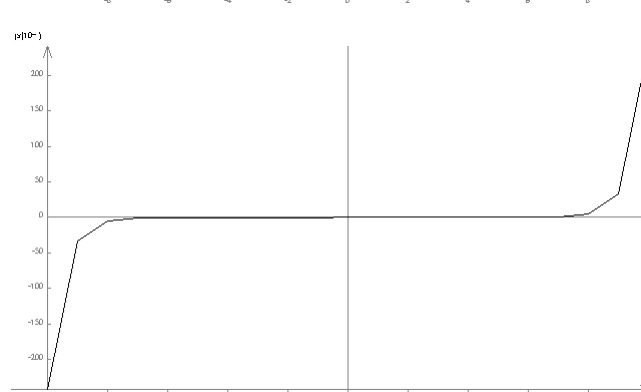
INCORPORER Equation.DSMT4

.Finalement,



INCORPORER Equation.DSMT4

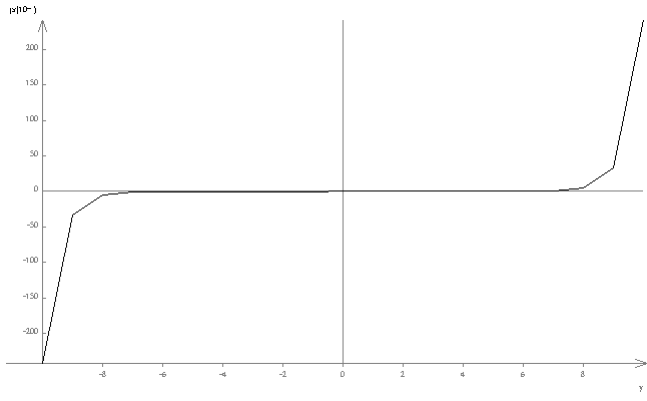
.9: On pose



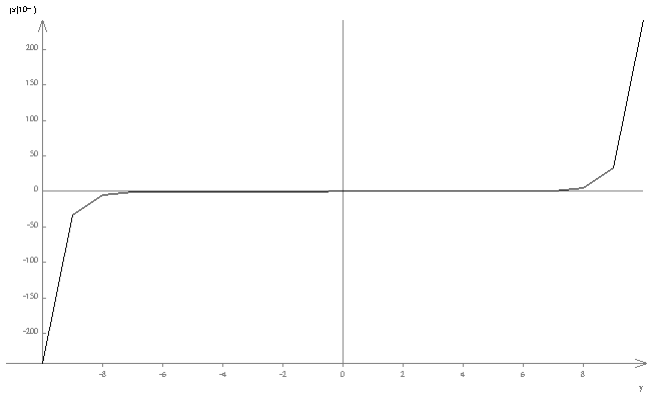
INCORPORER Equation.DSMT4

; l'équation

obtenue en 7: devient: INCORPORER Equation.DSMT4



γ , soit INCORPORER Equation.DSMT4

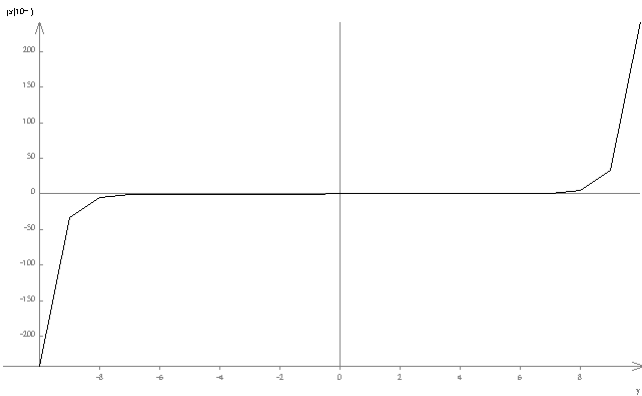


γ , ce qui s'intègre en INCORPORER



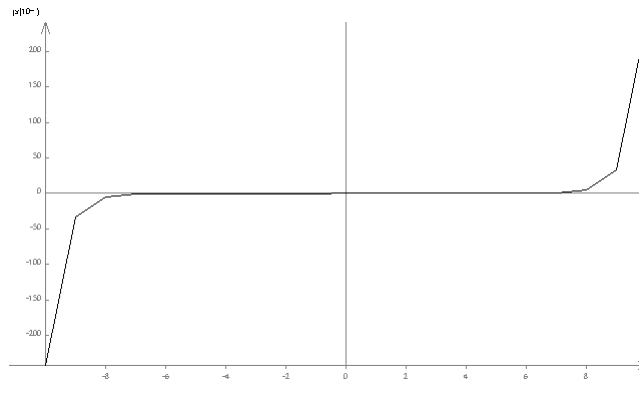
Equation.DSMT4

γ avec INCORPORER

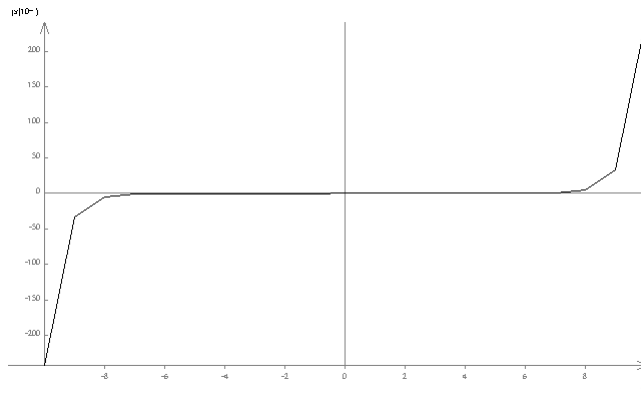


Equation.DSMT4

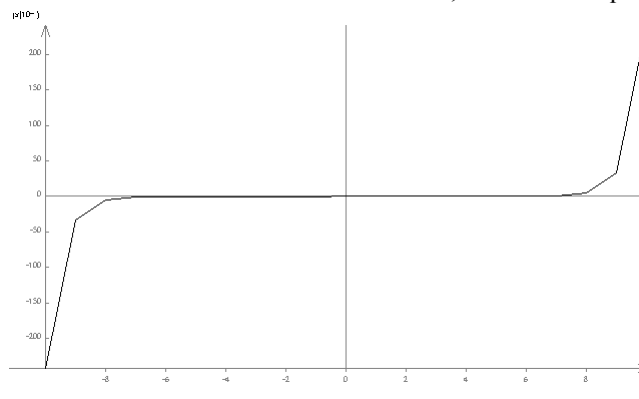
γ , d'où INCORPORER



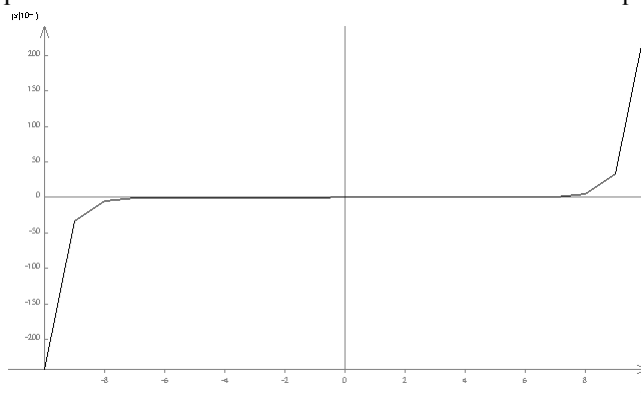
Equation.DSMT4
 connaissant $F(1) = 0$ et $F(0) = 1$ d'après la question 4: INCORPORER Equation.DSMT4 .Il faut encore intégrer une fois,



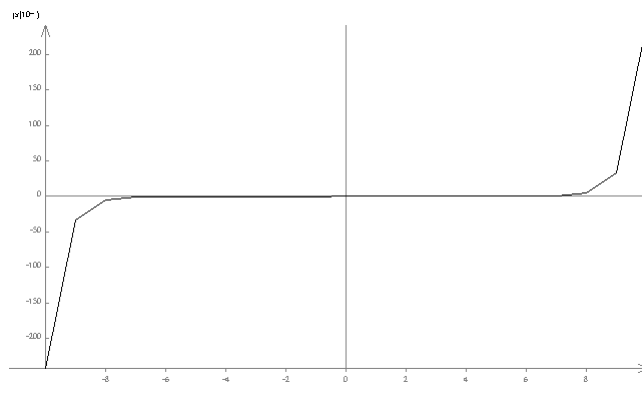
; on en déduit que INCORPORER



Equation.DSMT4
 précédente donne 1 .On obtient alors INCORPORER Equation.DSMT4 .10: Si $p \ll 1$, l'équation



.Si p augmente, le champ appliqué est plus intense, et y_0 , endroit où on atteint la valeur critique, augmente.Si p augmente, le champ aura une décroissance sur une épaisseur plus petite dans le matériau normal la profondeur de peau serait du type INCORPORER



Equation.DSMT4

ainsi plus rapidement la valeur critique et y_0 diminue.11: INCORPORER Equation.DSMT4

