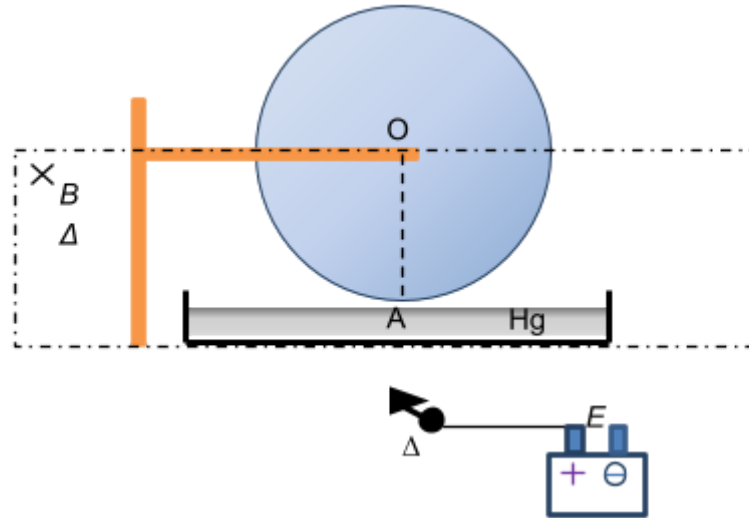


## Ένα μοτεράκι με υδράργυρο



Ένας λεπτός μεταλλικός δίσκος ακτίνας  $r = 0,2m$ , μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του  $O$ . Τοποθετούμε μια λεκάνη με υδράργυρο κάτω από το δίσκο, έτσι ώστε το κατώτατο σημείο  $A$  του δίσκου να εφάπτεται στην επιφάνεια υδραργύρου. Συνδέουμε με καλώδια τους πόλους μιας μπαταρίας, ΗΕΔ  $E = 6V$  και μηδενικής εσωτερικής αντίστασης, στον άξονα του δίσκου και την επιφάνεια του υδραργύρου, όπως στο παραπάνω σχήμα. Με έναν ισχυρό πεταλοειδή μαγνήτη μπορούμε να δημιουργήσουμε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης μέτρου  $B = 2T$  και ύψους  $h = r$  από την επιφάνεια του υδραργύρου. Όταν κλείσουμε το διακόπτη  $\Delta$  θα παρατηρήσουμε ότι ο δίσκος περιστρέφεται.

α) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί περιστρέφεται ο δίσκος;

β) Αν η αντίσταση ανά μονάδα μήκους του δίσκου είναι  $R^* = 5\Omega/m$  να υπολογιστεί το μέτρο της δύναμης Laplace που ασκείται στο τμήμα  $OA$  τη στιγμή που ξεκινά η περιστροφή.

γ) Αν η μάζα του δίσκου είναι  $M = 0,8kg$  να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής γωνιακής επιτάχυνσης, που αποκτά.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο σε αυτόν, που διέρχεται από το κέντρο του,  $I = (1/2)MR^2$

δ) Αν θεωρήσουμε ότι μεταξύ του κέντρου  $O$  του δίσκου και του σημείου  $A$  της περιφέρειας

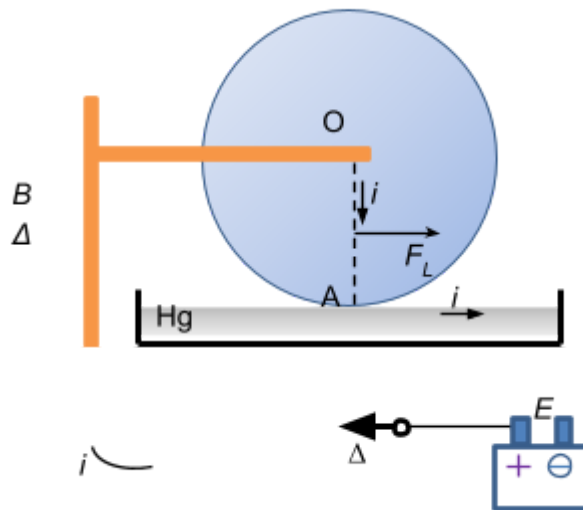
αναπτύσσεται ΗΕΔ επαγωγής που δίνεται από τη σχέση  $E_{επ} = \frac{1}{2}B\omega r^2$  υπολογίστε την οριακή γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει ο δίσκος.

Θεωρούμε αμελητέες τριβές και αντιστάσεις.

## Απάντηση

α) Μόλις κλείσουμε το διακόπτη, ηλεκτρικό ρεύμα διέρχεται κατά τη διεύθυνση της κατακόρυφης ακτίνας ΟΑ. Αν απομονώσουμε νοητικά αυτό το τμήμα, μπορούμε να το φανταστούμε σαν έναν ευθύγραμμο\* αγωγό που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου, θα ασκηθεί δύναμη Laplace, στο μέσον της ΟΑ, που σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων του δεξιού χεριού, θα είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα 1 και θα δημιουργήσει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου, η οποία θα τον επιταχύνει στροφικά. Η κίνηση θα είναι στροφικά επιταχυνόμενη με χρονικά μειούμενη επιτάχυνση μέχρι που ο δίσκος θα αποκτήσει μια σταθερή (οριακή) γωνιακή ταχύτητα.

σχήμα 1



β) Η αντίσταση που συναντά το ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέοντας το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ

$$\text{είναι } R = R^* \cdot r = (5\Omega/m) \cdot 0,2m = 1\Omega \text{ άρα η έντασή του θα είναι } i_0 = \frac{E}{R} = 6A$$

Η δύναμη Laplace που δέχεται το τμήμα ΟΑ ασκείται στο μέσον του και έχει μέτρο

$$F_{L,0} = B \cdot i_0 \cdot r = 2 \cdot 6 \cdot 0,2 = 2,4N$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής και έχουμε

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega v,0} \Leftrightarrow F_{L,0} \cdot \frac{r}{2} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega v,0} \Leftrightarrow F_{L,0} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} Mr^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v,0}$$

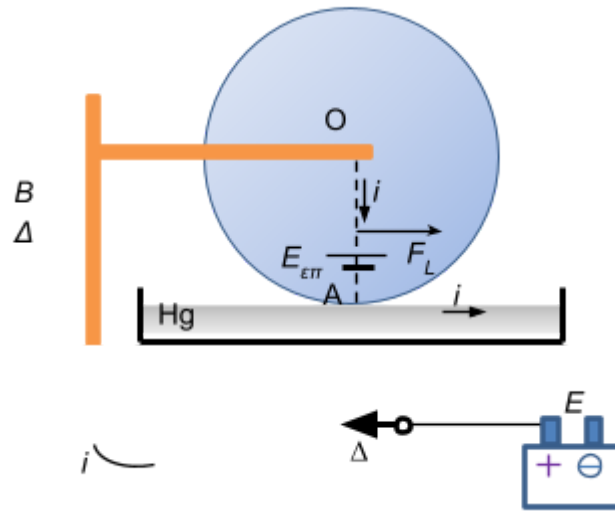
$$\Leftrightarrow F_{L,0} = Mr \cdot \alpha_{\gamma\omega v,0} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega v,0} = \frac{F_{L,0}}{Mr} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega v,0} = \frac{2,4}{0,8 \cdot 0,2} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega v,0} = 15 \text{ rad} / \text{s}^2$$

δ) Είπαμε πριν ότι η ακτίνα ΟΑ ισοδυναμεί με έναν ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό. Η περιστροφή όμως του δίσκου επιβάλλει σε αυτόν τον αγωγό να στρέφεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ΗΕΔ επαγωγής όπως στο σχήμα 2, με τιμή

$$E_{\text{επ}} = \frac{1}{2} B \omega r^2, \text{ όπου } \omega \text{ το μέτρο της στιγμιαίας γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.}$$

Μια τυχαία χρονική στιγμή, μετά το ξεκίνημα της περιστροφής, εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα και παίρνουμε

σχήμα 2



$$i = \frac{E - E_{\varepsilon\pi}}{R} \Leftrightarrow i = \frac{E - \frac{1}{2}B\omega r^2}{R} \Leftrightarrow i = \frac{2E - B\omega r^2}{2R} \quad (1)$$

Η στιγμιαία δύναμη Laplace θα έχει μέτρο

$$F_L = B \cdot i \cdot r \xrightarrow{(1)} F_L = \frac{2EBr - B^2\omega r^3}{2R} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής και έχουμε

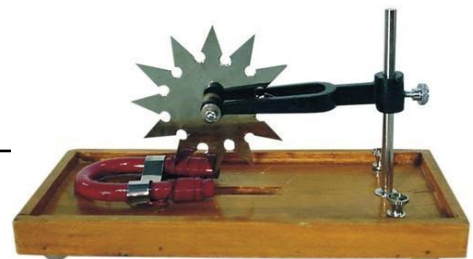
$$\begin{aligned} \Sigma \tau &= I \cdot \alpha_{\gamma\omega v} \Leftrightarrow F_L \cdot \frac{r}{2} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega v} \Leftrightarrow F_L \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{2} Mr^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega v} \\ \Leftrightarrow F_L &= Mr \cdot \alpha_{\gamma\omega v} \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega v} = \frac{F_L}{Mr} \xrightarrow{(2)} \alpha_{\gamma\omega v} = \frac{2EBr - B^2\omega r^3}{Mr} \\ \Leftrightarrow \alpha_{\gamma\omega v} &= \frac{2EBr - B^2\omega r^3}{2MRr} \quad (3) \end{aligned}$$

Η σχέση (3) μας λέει ότι όσο αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται η γωνιακή επιτάχυνση. Ο δίσκος θα αποκτήσει σταθερή (οριακή) ταχύτητα τη στιγμή που

$$\begin{aligned} \alpha_{\gamma\omega v} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2EBr - B^2\omega_{op} r^3}{2MRr} = 0 \Leftrightarrow 2EBr - B^2\omega_{op} r^3 = 0 \\ \Leftrightarrow \omega_{op} &= \frac{2E}{Br^2} \Leftrightarrow \omega_{op} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 0,2^2} \Leftrightarrow \omega_{op} = \frac{12}{0,08} \Leftrightarrow \omega_{op} = 150 \text{ rad} / \text{s} \end{aligned}$$

### Σχόλια

α) Θεωρήσαμε για ευκολία τη διαδρομή που ακολουθεί το ηλεκτρικό ρεύμα ανάμεσα στα σημεία Ο και Α ευθύγραμμη.



Ο ηλεκτρικός κινητήρας που είδαμε, είναι μια εκδοχή της κατασκευής, που έκανε το 1822 ο Άγγλος Μαθηματικός Peter Barlow με ακτινωτό τροχό. Ο υδράργυρος λόγω τοξικότητας, μπορεί να αντικατασταθεί από ένα αγώγιμο διάλυμα π.χ. πυκνό αλατόνερο. Κι ένα video με τον τροχό σε δράση

[Barlow's Wheel](#).

β) Το ερώτημα (δ) βγήκε για το 2019-2020 «ακατάλληλο για τους κάτω των 18 ετών», οπότε ας μην το διαβάσουν...

**Ανδρέας Ριζόπουλος**