

Η θεωρία στα Μαθηματικά Προσανατολισμού:
Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας - Πληροφορικής
Ορισμοί - Ιδιότητες - Προτάσεις - Θεωρήματα -
Αποδείξεις - Αντιπαραδείγματα

Επιμέλεια: Βασιλάκογλου Μαρία (1-2-2024)
1^ο ΓΕΛ Αγίου Αθανασίου

Από αρχεία των...

- 1) Μπάμπη Στεργίου / Παπαμικρούλη Δημήτρη*
- 2) Κωνσταντίνου Γεωργίου*

(από το lisari.blogspot.gr)

Α. Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Έστω A ένα υποσύνολο του R . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μία διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία **κάθε στοιχείο** $x \in A$ αντιστοιχίζεται **σε ένα μόνο** πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Σχόλια

- Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε: $f: \rightarrow R$
 $x \rightarrow f(x)$.
- Το γράμμα x που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .

2. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y | y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$. Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $f(A)$.

3. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι «Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο B »;

Απάντηση

Εννοούμε ότι το σύνολο B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της και το σύνολο τιμών της $f(B)$ είναι $f(B) = \{y | y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}$.

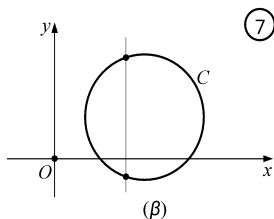
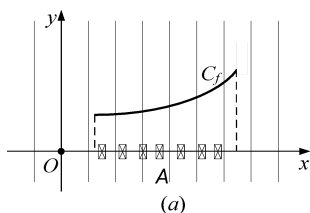
4. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, **με** $x \in A$.

Σχόλια

- Η γραφική παράσταση της f συμβολίζεται συνήθως με C_f .
- Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται **μόνο από τα σημεία της** C_f . Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f .



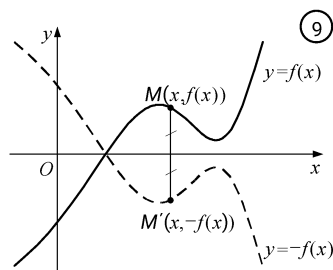
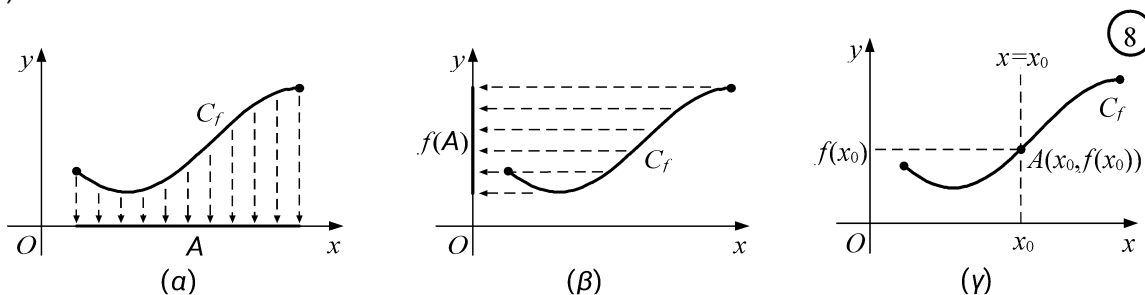
- Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in R$, **δεν** υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την **ίδια τετμημένη**. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε κατακόρυφη ευθεία** έχει με τη γραφική παράσταση της f **το πολύ ένα κοινό σημείο** (Σχ. 7α). Έτσι, ο κύκλος **δεν** αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).

- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f , τότε:

α) Το **πεδίο ορισμού** της f είναι το σύνολο A των **τετμημένων** των σημείων της C_f .

β) Το **σύνολο τιμών** της f είναι το σύνολο $f(A)$ των **τεταγμένων** των σημείων της C_f .

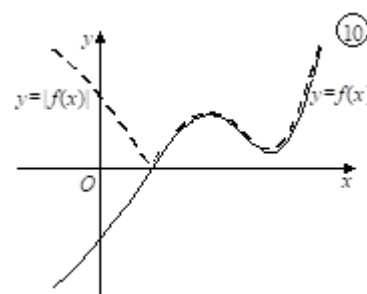
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f $f(x_0) = y_0$ (Σχ. 8).



- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f , μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι **συμμετρική**, ως προς τον άξονα $\dot{x}x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι **συμμετρικά** των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $\dot{x}x$ (Σχ. 9).

β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται **πάνω από** τον άξονα $\dot{x}x$ ή **πάνω σε αυτόν** και από τα **συμμετρικά**, ως προς τον άξονα $\dot{x}x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται **κάτω** από τον άξονα αυτόν (Σχ. 10).



5. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x) = \alpha x + \beta$

β) $f(x) = \alpha x^2, \alpha \neq 0$

γ) $f(x) = \alpha x^3, \alpha \neq 0$

δ) $f(x) = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$

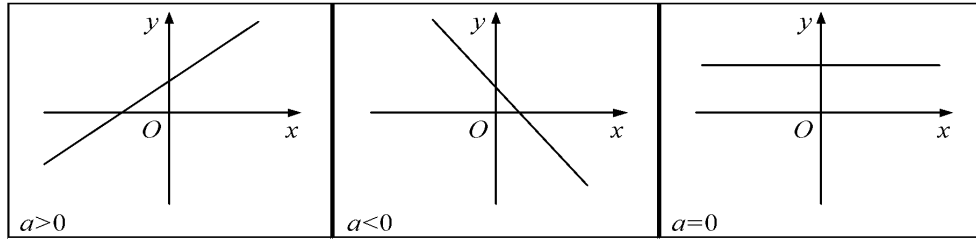
ε) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{|x|}$.

Απάντηση

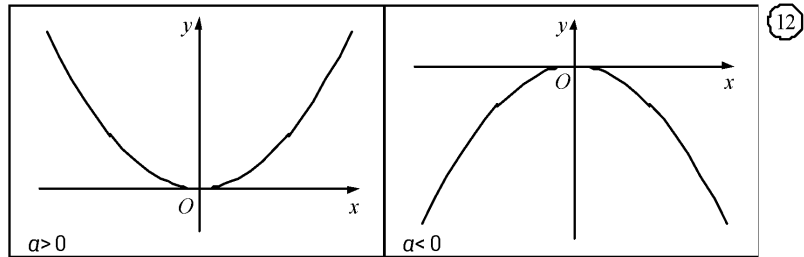
Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta, x \in \mathbb{R}$. Γραμμική συνάρτηση-Ευθεία

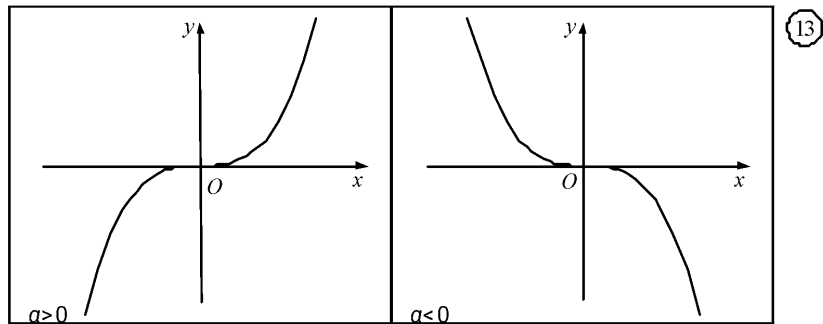
11



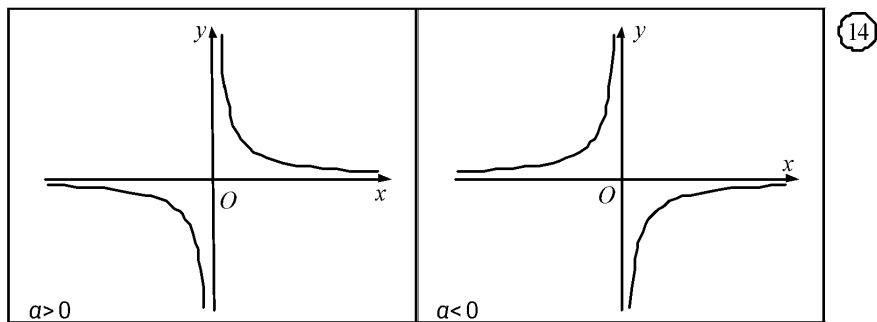
β) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Τετραγωνική -Παραβολή



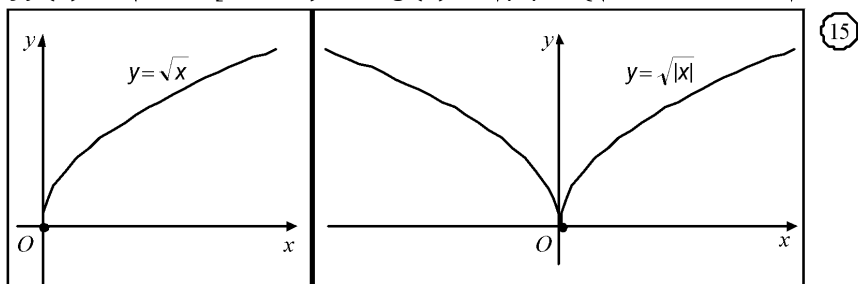
γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = ax^3$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Κυβική συνάρτηση



δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Υπερβολή



ε) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{|x|} = \{\sqrt{-x}, x < 0, \sqrt{x}, x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$.



6. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

α) $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\varphi x$

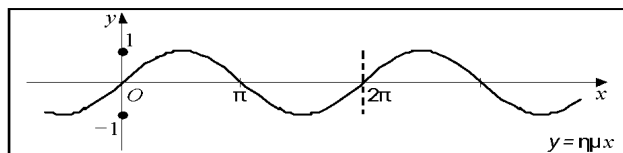
β) $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ γ) $f(x) = x$, $0 < \alpha \neq 1$

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

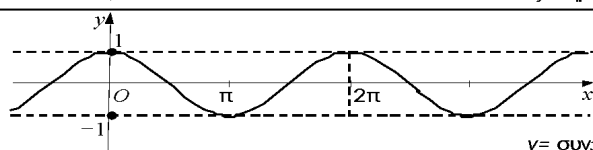
α) Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις : $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$, περιοδικές με $T = 2\pi$,
 $f(x) = \varepsilon\varphi x$, $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$f(x) = \sigma\varphi x$, $x \in \{ x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$ περιοδικές με $T = \pi$.

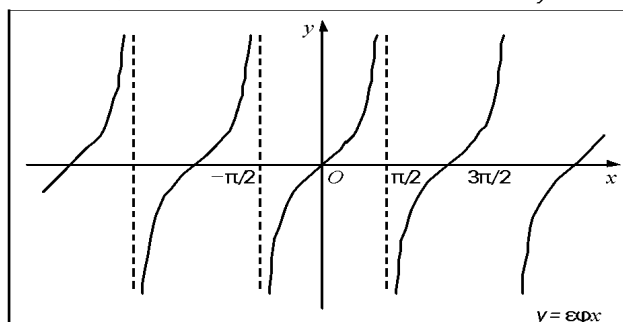


(16)

(α)

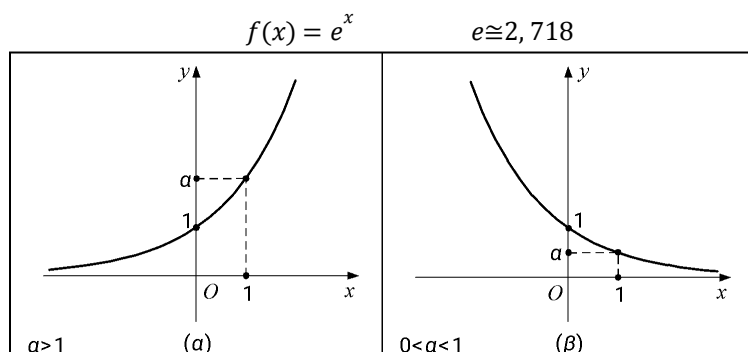


(β)



(γ)

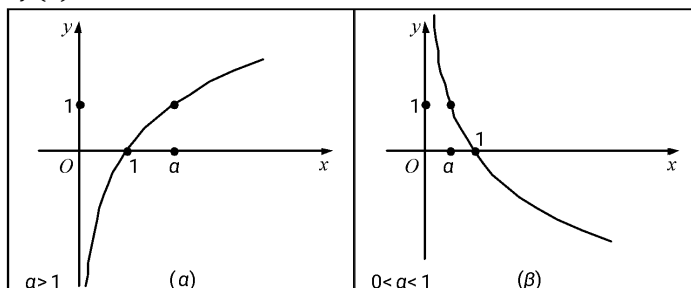
β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.



(17)

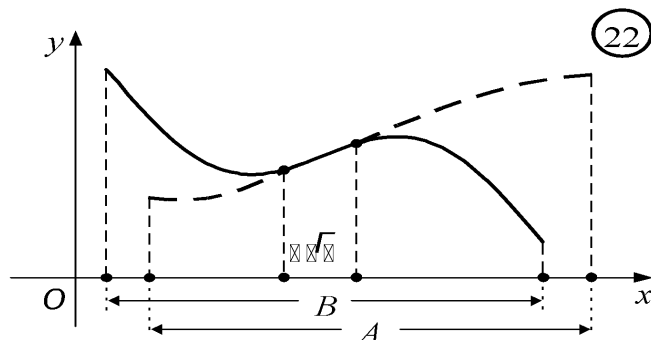
γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, $x \in (0, +\infty)$.

$$f(x) = \ln x$$



(18)

7. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;



Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το **ίδιο πεδίο ορισμού** $A_f = A_g = A$ και
- για κάθε $x \in A$ **ισχύει** $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Σχόλιο:

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ . (Σχ. 22)

8. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f, g ;

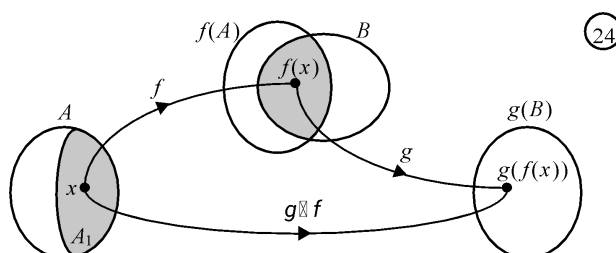
Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg , και πηλίκο $\frac{f}{g}$, δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g, f - g$ και fg είναι η **τομή** $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, δηλαδή $D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = A \cap B$, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, **εξαιρουμένων** των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

9. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g ;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Σχόλια

- α) Το **πεδίο ορισμού** της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται, αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

- β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές **δεν είναι υποχρεωτικά ίσες**.

Αντιπαράδειγμα

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x, x \in (0, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$. Τότε

$(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}, x \in [1, +\infty)$ και $(f \circ g)(x) = \ln \sqrt{x}, x \in (0, +\infty)$, δηλαδή $g \circ f \neq f \circ g$.

γ) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

10. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ** . Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι **γνησίως μονότονη**.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη):

- α)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

10α. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα και πότε φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **(ολικά) ακρότατα** της f .

Σχόλια

- α) Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει **μόνο** ελάχιστο ή **μόνο** μέγιστο ή ελάχιστο και μέγιστο ή **τίποτε** από τα δύο.
- β) Τα ακρότατα μπορεί να εμφανίζονται σε **ένα**, **δύο**, ..., ή **άπειρα** σημεία.

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει μέγιστο το $y = 1$ σε κάθε ένα από τα σημεία $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ και ελάχιστο το $y = -1$ σε κάθε ένα από τα σημεία $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή σε **άπειρες θέσεις**.

12. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1 - 1$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται συνάρτηση $1 - 1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $x_1 \neq x_2$, τότε : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Σχόλια

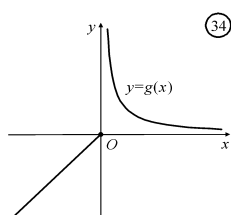
α) Μια συνάρτηση $f: \rightarrow R$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: **αν** $f(x_1) = f(x_2)$, **τότε** $x_1 = x_2$.

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση $1-1$.

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

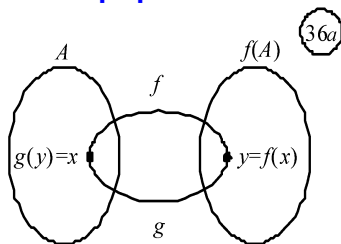


Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34) είναι $1-1$, αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f σε ένα σημείο, αλλά **δεν είναι γνησίως μονότονη**, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

13.α) Πότε μια συνάρτηση $f: \rightarrow R$ αντιστρέφεται ;
β) Με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

Απάντηση



α) Μια συνάρτηση $f: \rightarrow R$ αντιστρέφεται, όταν είναι $1-1$.

β) Αν η συνάρτηση $f: \rightarrow R$ είναι $1-1$, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζουμε με f^{-1} , τη συνάρτηση που έχει **πεδίο ορισμού** το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , και **σύνολο τιμών** το πεδίο ορισμού A της f , και με την οποία **κάθε στοιχείο** $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο **μοναδικό στοιχείο** $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση της f ορίζεται ως εξής

$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$ και για την οποία ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι : $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

β) Η αντίστροφη της f έχει **πεδίο ορισμού** το σύνολο τιμών $f(A)$ της f , και **σύνολο τιμών** το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη C_f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι **συμμετρικά** ως προς την **ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$** . Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι **συμμετρικές ως προς την ευθεία** $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη):

Αν η συνάρτηση $f: \rightarrow R$ είναι αντιστρέψιμη, τότε ισχύει η ισοδυναμία $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$,
Δηλαδή οι εξισώσεις $f^{-1}(x) = x$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

B. Όρια συναρτήσεων

1. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_0 και τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ;

Απάντηση

Ισχύει ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η

$$\text{ισοδυναμία: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Τους αριθμούς $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια της f** στο x_0 και συγκεκριμένα αριστερό

και δεξιό όριο της f αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις στο όριο

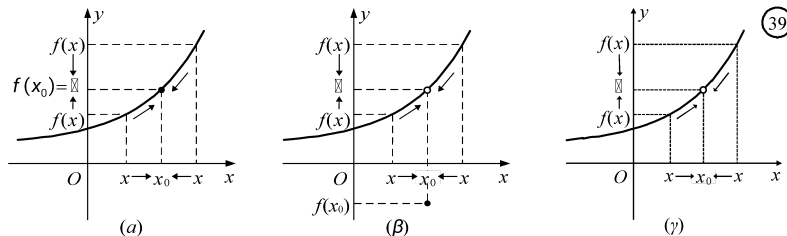
α) Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ & \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0 \\ (\beta) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ & \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l \\ (\gamma) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \\ (\delta) \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \end{aligned}$$

β) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε “**κοντά στο** x_0 ”,
δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ή (α, x_0) ή (x_0, β) .

— Το x_0 μπορεί να **ανήκει** στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να **μην ανήκει** σ' αυτό.

— Η τιμή της f στο x_0 , όταν υπάρχει, μπορεί να είναι **ίση** με το όριο της στο x_0 (Σχ. 39α) ή **διαφορετική** από αυτό.



Αντιπαράδειγμα

Το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ **δεν εξαρτάται** από τα άκρα α και β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) .

Για παράδειγμα, για να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο

$$(-1, 0) \cup (0, 1), \text{ όπου } f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1. \text{ (σχ. 46)}$$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_0 μια ιδιότητα P ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει **κοντά στο** x_0 μια ιδιότητα P , όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

- α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P .
 β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β) .
 γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , έχει σ' αυτό την ιδιότητα P , αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0) .

3. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_0 .

α) **Θεώρημα 1°** (πρόσημο συναρτήσεων και όρια)

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

β) **Θεώρημα 2ο** (διάταξη και όρια)

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Σχόλια

α) Αν το **όριο** μιας συνάρτησης στο x_0 είναι **θετικό** (αρνητικό), τότε η συνάρτηση είναι **θετική** (αρνητική) κοντά στο x_0 .

β) Αν η συνάρτηση είναι **θετική** (αρνητική) κοντά στο x_0 , τότε το **όριό** της στο x_0 (αν υπάρχει) είναι **μη αρνητικό** (μη θετικό).

γ) **Θεώρημα 3ο** (πράξεις συναρτήσεων και όρια)

Αν **υπάρχουν** τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ισχύει και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v, v \in \mathbb{N}^*$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}, \text{ εφόσον } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

δ) **Θεώρημα 4°**

4. Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.
 Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0).\end{aligned}$$

5. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, με $Q(x_0) \neq 0$. Να δείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0) \neq 0$.

Απόδειξη

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0.$$

ε). Θεώρημα 5ο Κριτήριο παρεμβολής.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$,

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)-Γενίκευση κριτηρίου παρεμβολής

Έστω δύο συναρτήσεις f, g στο x_0 για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq g(x)$, για κάθε x κοντά στο x_0 , με $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, **τότε** $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, **τότε** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

στ) Ισχύουν: (τριγωνομετρικά όρια)

- $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Βασικές ανισότητες

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή $|\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$.

β) Για κάθε $x > 0$, ισχύει $\ln x \leq x - 1$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, δηλαδή $\ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή $e^x = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

δ) Για κάθε $x > 0$, ισχύει $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x$.

6. Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_0 ;

Απάντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , δηλαδή το

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $l = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με το l , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

7. Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

γ) Αν τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, , ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty.$$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

ενώ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

η) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

θ) i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$.

ii) $\frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}$.

i) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$										
το όριο της f είναι:	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται **απροσδιόριστες μορφές**:

$$(+\infty) + (-\infty), 0 \cdot (\pm\infty), (+\infty) - (+\infty), (-\infty) - (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Αντιπαράδειγμα

Για τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{1}{x^2}) = -\infty. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 1, \text{ δηλαδή } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \neq 0.$$

8. Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο.
Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

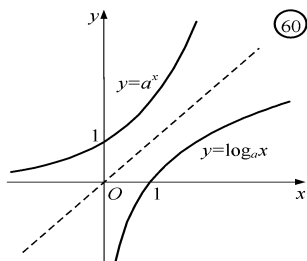
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0, v \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0, v \in \mathbb{N}^*.$

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0$, με $\alpha_v \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0, \beta_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\kappa x^\kappa} \right)$$

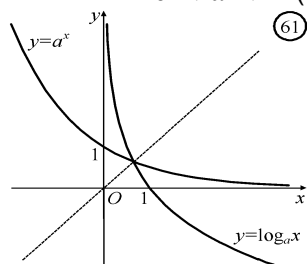


δ) Για το όριο εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης ισχύει ότι

· Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \end{aligned}$$

· Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = -\infty \end{aligned}$$

Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty, -\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:
— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή

7.α) Τι είναι η ακολουθία;

β) Πότε λέμε ότι μια ακολουθία (α_n) έχει όριο $l \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

α) **Ακολουθία** ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

β) Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_n) έχει όριο $l \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = l$, όταν για κάθε

$\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|\alpha_n - l| < \varepsilon$.

Γ. Συνέχεια συνάρτησης

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, όταν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν** είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) **Δεν υπάρχει το όριό** της στο x_0 ή

ii) **Υπάρχει το όριό** της στο x_0 , αλλά είναι **διαφορετικό** από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής **σε όλα τα σημεία** του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση**.

γ) i) Κάθε **πολυωνυμική** συνάρτηση P είναι συνεχής, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

ii) Κάθε **ρητή** συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

iii) Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0.$$

iv) Οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha^x$ και x , $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχείς.

2. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων.

Απάντηση

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$f + g, f \cdot g, c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}, \frac{f}{g}, |f|, \sqrt[n]{f}$, με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

Σχόλιο

Οι συναρτήσεις $f(x) = \varepsilon\phi x$, $f(x) = \sigma\phi x$ είναι συνεχείς, ως πηλίκια συνεχών συναρτήσεων.

3. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης.

Απάντηση

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε **κάθε σημείο του** (α, β) .
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής** σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε **κάθε σημείο του** (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Σχόλιο

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

5. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

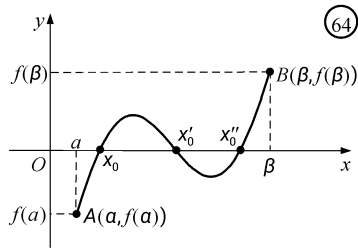
Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

· η f είναι **συνεχής στο** $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει

· $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο, ώστε** $f(x_0) = 0$.



Δηλαδή, υπάρχει μια **τουλάχιστον ρίζα** της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν f **συνεχής** συνάρτησης στο $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται **εκατέρωθεν του άξονα x** , τότε η C_f **τέμνει τον άξονα x σε ένα τουλάχιστον σημείο** $M(x_0, 0)$, με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Σχόλια

- Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής σε ένα διάστημα Δ** και **δε μηδενίζεται σ' αυτό**, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή **διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ** .
- Μια **συνεχής** συνάρτηση f **διατηρεί πρόσημο** σε καθένα από τα **διαστήματα** στα οποία οι **διαδοχικές ρίζες** της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα

6. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

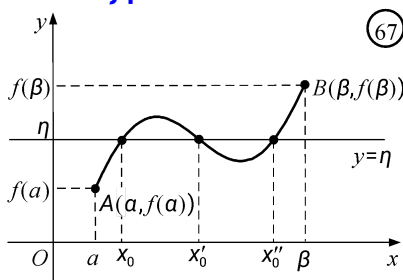
- η f είναι **συνεχής στο $[\alpha, \beta]$** και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, **για κάθε αριθμό η , μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$** υπάρχει **ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$**

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν f **συνεχής** συνάρτησης στο $[\alpha, \beta]$ και τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται **εκατέρωθεν της ευθείας $y=\eta$** , τότε η C_f **τέμνει την ευθεία $y=\eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $M(x_0, \eta)$, με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$** .

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67).

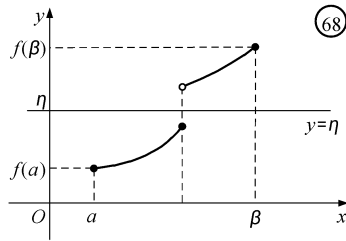
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι **συνεχής στο $[\alpha, \beta]$** και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, **υπάρχει**

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ **τέτοιο ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$** .



Σχόλια

α) Αν μια συνάρτηση f **δεν είναι συνεχής** στο διάστημα $[α, β]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, **δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.**

β) Η **εικόνα** $f(Δ)$ ενός διαστήματος $Δ$ μέσω μιας **συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.**(σχ.69)

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα και συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα $(α, β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ **και**

$$B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα και συνεχής** στο $(α, β)$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

7. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

Απάντηση

Αν f είναι **συνεχής** συνάρτηση στο $[α, β]$, τότε η f παίρνει στο $[α, β]$ μια **μέγιστη τιμή M** και μια **ελάχιστη τιμή m** .

Δηλαδή, **υπάρχουν** $x_1, x_2 \in [α, β]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [α, β]$.

Σχόλιο

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι **το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[α, β]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$** , όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)-Σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα $Δ$ και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$$

τότε $f(Δ) = (-\infty, +\infty)$.

$$Δ = (α, β) \text{ ή } (α, +\infty) \text{ ή } (-\infty, β) \text{ ή } (-\infty, +\infty)$$

Δ1. Διαφορικός λογισμός (Κανόνες παραγωγίσισης)

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, **αν και μόνο αν** υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Σχόλια

α) Αν στην ισότητα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ θέσουμε $x = x_0 + h$, τότε έχουμε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx , ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το **Leibniz** να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\frac{df(x)}{dx} |_{x=x_0}$.

Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον **Lagrange**.

β) Αν το x_0 είναι **εσωτερικό** σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f , τότε η f είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 , **αν και μόνο αν υπάρχουν στο R τα όρια** $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι **ίσα**.

2. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .**

Οπότε, **εξίσωση** της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - f(x_0) = \lambda(x - x_0) \text{ με } \lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Σχόλιο

α) Ο **συντελεστής διεύθυνσης** της εφαπτομένης ε της C_f μιας **παραγωγίσιμης** συνάρτησης f , στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Δηλαδή, $\lambda = f'(x_0)$,

οπότε η **εξίσωση της εφαπτομένης ε** γίνεται: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

β) Την **κλίση $f'(x_0)$** της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A ή κλίση της f στο x_0 .**

γ) Η **στιγμιαία ταχύτητα** ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή, είναι $v(t_0) = S'(t_0)$.

Θεώρημα

3. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

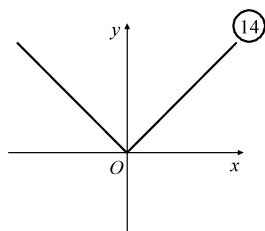
Απόδειξη

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι **παραγωγίσιμη στο x_0** . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι **συνεχής στο x_0** .

Αντιπαράδειγμα



α) Το **αντίστροφο** του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**:

Η $f(x) = |x|$ είναι **συνεχής στο $x_0 = 0$** , αλλά **δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό**, αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

β) Ισχύει όμως ότι: **Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .**

Ορισμός

4. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται:

α) Παραγωγίσιμη στο σύνολο A

β) Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

γ) Παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ **Απάντηση**

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Θα λέμε ότι:

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

β) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** $(α, β)$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (α, β)$.

γ) Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ και επιπλέον ισχύει: $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$.

Ορισμός

5. Τι ονομάζουμε πρώτη, δεύτερη και γενικά νιοστή παράγωγο μίας συνάρτησης f ;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι **παραγωγίσιμη**. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, με $x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f** . Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται: $y = (f(x))'$ και $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι".

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η **παράγωγος της f'** , αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' .

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f** , με $v \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(v)}$. Δηλαδή $f^{(v)} = [f^{(v-1)}]'$, $v \geq 3$.

Σχόλιο

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

6. Να αποδείξετε ότι :

α) Αν $f(x) = c$, με $c \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = 0$

β) Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$

γ) Αν $f(x) = x^v$, με $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, τότε $f'(x) = vx^{v-1}$

δ) Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

Απόδειξη

α) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

β) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει ότι: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

γ) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^v-x_0^v}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\dots+x_0^{v-1})}{x-x_0} = x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\dots+x_0^{v-1}. \text{ Επομένως}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1}+x^{v-2}x_0+\dots+x_0^{v-1}) = x_0^{v-1}+x_0^{v-1}+\dots+x_0^{v-1} = vx_0^{v-1},$$

$$\text{δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

δ) Αν $x_0 \in (0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

$$\text{οπότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(Σημείωση: η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0).

Σχόλια – Τύποι

· Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

· Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$, δηλαδή

$$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$$

· Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x) = e^x$, δηλαδή

$$(e^x)' = e^x$$

· Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln \ln x)' = \frac{1}{x}$$

7. Θεώρημα (Παράγωγος αθροίσματος)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$.

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0), \text{ δηλαδή}$$

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ , τότε $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$.

8. Θεώρημα (Παράγωγος γινομένου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

β) Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$\begin{aligned} (f(x)g(x)h(x))' &= [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x). \end{aligned}$$

γ) Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c \in \mathbb{R}$, επειδή $(c)' = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα έχουμε: $(cf(x))' = cf'(x)$.

9. Θεώρημα (Παράγωγος πηλίκου)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $g(x) \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ έχουμε: $(x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}$.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$

Απόδειξη

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sin x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sin x - \eta\mu x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{\sin x \sin x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \eta\mu^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Σημείωση- Τύπος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή $(\sigma\phi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

12. Θεώρημα

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Σχόλια

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$. Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**. Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ **δεν είναι πηλίκο**. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

13. Θεώρημα

Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$,

β) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln \ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Απόδειξη

α) Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

β) Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \ln \alpha} \cdot \ln \ln \alpha = \alpha^x \ln \ln \alpha.$$

γ) Πράγματι:

— αν $x > 0$, τότε $(\ln \ln |x|)' = (\ln \ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln \ln |x| = \ln \ln (-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln \ln (-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln \ln u$. Επομένως, $y' = (\ln \ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln \ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

Δ2. Διαφορικός λογισμός (Βασικά θεωρήματα-Συνέπειες ΘΜΤ - Μονοτονία)

14. Τι λέμε **ρυθμό μεταβολής** του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση

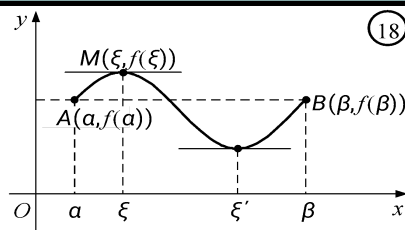
παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια

α) Ο **ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας u** ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $u'(t_0)$, της ταχύτητας u ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $u'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$, δηλαδή: $a(t_0) = u'(t_0) = s''(t_0)$.

β) Στην οικονομία το **κόστος παραγωγής K** , η **είσπραξη E** και το **κέρδος P** εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το **ρυθμό μεταβολής του κόστους K** ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται **οριακό κόστος στο x_0** . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη** στο x_0 και **οριακό κέρδος** στο x_0 .

15. Να διατυπώσετε τι θεωρήμα του **Rolle** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.



Απάντηση

Το θεωρήμα του Rolle διατυπώνεται ως εξής:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- **συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$**
- **παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) και**
- **$f(a) = f(b)$**

τότε υπάρχει **ένα τουλάχιστον $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$** .

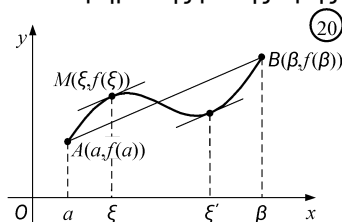
Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η C_f είναι μία **συνεχής γραμμή** από το σημείο $A(a, f(a))$ στο $B(b, f(b))$, η f είναι **παραγωγίσιμη στο (a, b)** και το ευθύγραμμο **τμήμα AB** είναι **παράλληλο στον άξονα x** , τότε υπάρχει **μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη της C_f** στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με τετμημένη $\xi \in (a, b)$.

16. Να διατυπώσετε το **θεώρημα της μέσης τιμής** του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Το θεωρήμα της μέσης τιμής διατυπώνεται ως εξής:



Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
 - παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:
- $$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η C_f είναι μία συνεχής γραμμή από το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ στο $B(\beta, f(\beta))$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, που είναι παράλληλη στην ευθεία AB , με $\xi \in (\alpha, \beta)$.

17. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του **θεωρήματος μέσης τιμής**.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του

Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αντιπαράδειγμα

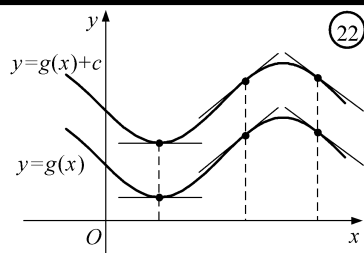
Το παραπάνω θεώρημα **δεν ισχύει** για ένωση διαστημάτων.

Για παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ισχύει $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

18. Θεώρημα

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι **συνεχείς** στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ ,
- τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$



Απόδειξη

Η συνάρτηση $f - g$ είναι **συνεχής στο Δ** και για κάθε **εσωτερικό** σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι **σταθερή στο Δ** . Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.

Σχόλιο

Τα παραπάνω θεωρήματα (3 και 4) ισχύουν σε διάστημα και **όχι σε ένωση διαστημάτων**.

19. Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = ce^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημείωση: Αντί του $\mathbb{R}$ μπορούμε να έχουμε τυχαίο διάστημα Δ .

20. Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι **γνησίως φθίνουσα** σε όλο το Δ .

Απόδειξη

• Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί

τις προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

• Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

Αντιπαράδειγμα

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ , η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως η παράγωγός της $f'(x) = 3x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$.

Δηλαδή ισχύει $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (σχ. 27)

Δ₃. Διαφορικός λογισμός (ακρότατα- σημεία καμπής – ασύμπτωτες- κανόνες de L'Hospital)

21. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

Απάντηση

α) Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f** .

β) Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f** .

Σχόλια

α) Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται θέσεις τοπικών ακροτάτων. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** ή απλά **ακρότατα** αυτής.

β) Ένα **τοπικό μέγιστο** μπορεί να είναι **μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο**.

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει **μέγιστο**, τότε αυτό θα είναι **το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα**, ενώ αν παρουσιάζει, **ελάχιστο**, τότε αυτό θα είναι **το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα**.

δ) Το **μεγαλύτερο** όμως από τα **τοπικά μέγιστα** μίας συνάρτησης **δεν είναι πάντοτε μέγιστο** αυτής. Επίσης το **μικρότερο** από τα **τοπικά ελάχιστα** μίας συνάρτησης **δεν είναι πάντοτε ελάχιστο** της συνάρτησης.

Αντιπαράδειγμα

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** στο $x = 0$ με $f(0) = 0$, που είναι και **ολικό ελάχιστο** και **τοπικό μέγιστο** στο $x = 1$ με $f(1) = 1$, που όμως **δεν είναι ολικό μέγιστο**. (σχ. 31)

Θεώρημα Fermat

22. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:
 $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 **τοπικό μέγιστο**. Επειδή το x_0 είναι **εσωτερικό** σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1) Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ,

$$\text{ισχύει } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

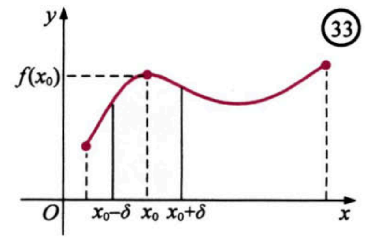
— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 , τότε η **εφαπτομένη της C_f** στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι **παράλληλη στον άξονα x** .

Αντιπαράδειγμα

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ και $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 **δεν είναι** απαραίτητα θέση **τοπικού ακροτάτου**.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, αν και $f'(0) = 0$, δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

23. α) Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
 β) Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ

Απάντηση

- α) **Κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ λέγονται τα **εσωτερικά** σημεία του Δ , στα οποία η f **δεν παραγωγίζεται** ή η **παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν**.
 β) Οι **πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων** μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
 1. Τα **εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται**.
 2. Τα **εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται**.
 3. Τα **άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

24. Πώς βρίσκουμε τα ολικά ακρότατα σε μια συνεχή συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα;

Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε από το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, η f παρουσιάζει **μέγιστο και ελάχιστο**. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου της συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα εργαζόμαστε ως εξής:

1. Βρίσκουμε τα **κρίσιμα σημεία της f** .
2. Υπολογίζουμε τις **τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων**.
3. Από αυτές τις τιμές η **μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f** .

25. Θεώρημα

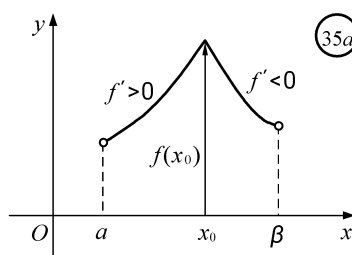
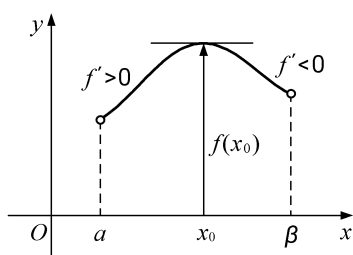
Έστω μια συνάρτηση f **παραγωγίσιμη** σ' ένα διάστημα (α, β) , με **εξαιρέση ίσως** ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f (Σχ. 35α).
 ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f (Σχ. 35β).
 iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) (Σχ. 35γ).

Απόδειξη

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι **συνεχής στο x_0** , η f είναι **γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$** . Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

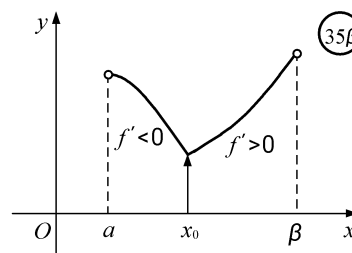
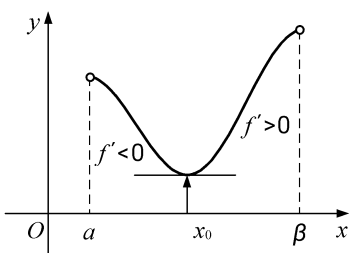
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι **γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$** . Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).



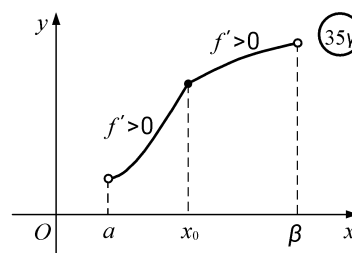
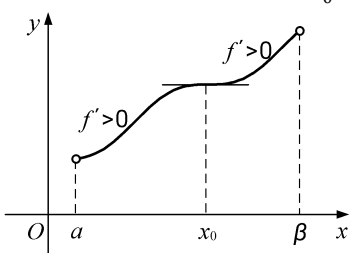
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι

μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

- ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



- iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι **συνεχής στο x_0** θα είναι **γνησίως αύξουσα** σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ **δεν είναι τοπικό ακρότατο** της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι **γνησίως αύξουσα στο (α, β)** .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

26. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή και πότε κοίλη σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- Η συνάρτηση f λέγεται **κυρτή** ή ότι **στρέφει τα κοίλα άνω** σ' ένα διάστημα Δ , όταν είναι **συνεχής** στο Δ και η f' είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\varepsilon\sigma\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\acute{o}$ του Δ .
- Η συνάρτηση f λέγεται **κοίλη** ή ότι **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** στο Δ , αν είναι **συνεχής** στο Δ και η f' είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\varepsilon\sigma\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\acute{o}$ του Δ .

Σχόλιο

α) Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι **κυρτή** χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\smile$ (αντιστοίχως **κοίλη** χρησιμοποιούμε $\frown$).

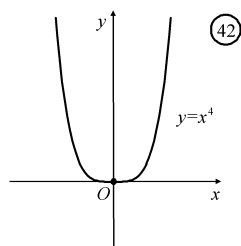
β) Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι **κυρτή** (αντιστοίχως **κοίλη**) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται **“κάτω”** (αντιστοίχως **“πάνω”**) από τη γραφική της παράσταση, **με εξαίρεση** το σημείο επαφής τους.

27. Να διατυπώσετε το θεώρημα που αφορά τα κοίλα και το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f .

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f **συνεχής** σ' ένα διάστημα Δ και **δυο φορές παραγωγίσιμη** στο $\varepsilon\sigma\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\acute{o}$ του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $\varepsilon\sigma\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\acute{o}$ σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κυρτή** στο Δ .



- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $\varepsilon\sigma\omega\tau\epsilon\rho\iota\kappa\acute{o}$ σημείο x του Δ , τότε η f είναι **κοίλη** στο Δ .

Σχόλιο Αντιπαράδειγμα

Το **αντίστροφο** του θεωρήματος **δεν** ισχύει. Μια συνάρτηση f , μπορεί να είναι κυρτή ή κοίλη, χωρίς η f'' να διατηρεί πρόσημο.

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R , η $f(x) = x^4$ είναι **κυρτή** στο R . Εντούτοις, η $f''(x)$ **δεν είναι θετική** στο R , αφού $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ και $f''(0) = 0$. (σχ.42)

28. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής μιας συνάρτησης f ;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f **παραγωγίσιμη** σ' ένα διάστημα (α, β) , **με εξαίρεση** ίσως ένα σημείο του x_0 .

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f , όταν:

- η f είναι **κυρτή** στο (α, x_0) και **κοίλη** στο (x_0, β) , ή **αντιστρόφως**, και
- η C_f έχει **εφαπτομένη** στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Σχόλιο

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε λέμε ότι η f **παρουσιάζει** στο x_0 **καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η **εφαπτομένη** της C_f **“διαπερνά”** την καμπύλη.

29. Ποιο θεώρημα αφορά τα σημεία καμπής μιας δυο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης f ;

Απάντηση

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f και η f είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη**, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σχόλιο Αντιπαράδειγμα

Το αντίστροφο του θεωρήματος **δεν ισχύει**. Μπορεί $f''(x_0) = 0$ αλλά να **μην** παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 . Παραπάνω παράδειγμα.

30. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Απάντηση

- i) Τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία η f'' **μηδενίζεται**.
- ii) Τα **εσωτερικά** σημεία του Δ στα οποία **δεν υπάρχει** η f'' .

Μέθοδος-Κριτήριο:

31. Πώς καταλήγουμε στο ποιες από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f αποτελούν τελικά σημεία καμπής της;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει **πρόσημο εκατέρωθεν** του x_0 και
 - ορίζεται **εφαπτομένη** της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,
- τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

32. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;

Απάντηση

Η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f , αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

33. Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

Απάντηση

Η ευθεία $y = l$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), όταν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

34. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$), αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$ (αντιστοίχως αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$).

35. Με ποιες σχέσεις (τύπους) βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της μορφής $y = \lambda x + \beta$;

Απάντηση

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$, αντιστοίχως: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$.

Χρήσιμα σχόλια

1. Αποδεικνύεται ότι:

- Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις βαθμού **μεγαλύτερου ή ίσου του 2** **δεν έχουν ασύμπτωτες**.
- Οι **ρητές** συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με **βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή**, **δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες**.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f **αναζητούμε:**

- Στα **άκρα των διαστημάτων** του πεδίου ορισμού της στα οποία η f **δεν ορίζεται**.
- Στα **σημεία του πεδίου ορισμού της**, στα οποία η f **δεν είναι συνεχής**.
- Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

36. Να διατυπώσετε τους κανόνες de L'Hospital.

1ος Κανόνας:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση ίσως το x_0

και **υπάρχει** το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2ος Κανόνας:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $g'(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0 με εξαίρεση

ίσως το x_0 και **υπάρχει** το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Σχόλια:

Ο 2ος κανόνας ισχύει και για τις **μορφές** $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$. Οι παραπάνω κανόνες ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Ε. Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζουμε κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

2. Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε, για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν οι σχέσεις $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε: $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

3. Πίνακας των παραγουσών βασικών συναρτήσεων

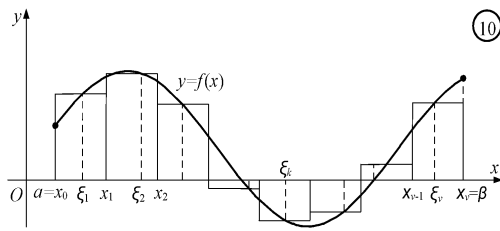
A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln \ln x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^a$	$G(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \sin x$	$G(x) = \eta \mu x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \eta \mu x$	$G(x) = -\sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
7	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$G(x) = \epsilon \varphi x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma \varphi x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Σχόλια:

- α)** Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.
- β)** Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των f και g αντιστοίχως και ο λ είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:
- i) Η συνάρτηση $F + G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f + g$ και
 - ii) Η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf .

4. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Απάντηση



Έστω μια συνάρτηση **f σ υ ν ε χ ή ς** στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_v = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε **ν ισομήκη** υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}$. Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα $S_v = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_v)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής: $S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x$. Το όριο του αθροίσματος S_v , δηλαδή το

$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right)$ **υπάρχει στο R** και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k . Το παραπάνω όριο ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β ,

συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β ". Δηλαδή,

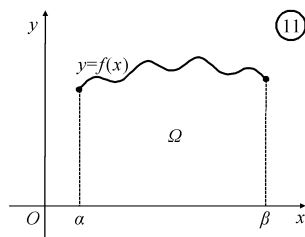
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k)\Delta x \right).$$

Σχόλιο:

Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο ολοκλήρωσης**. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια της ολοκλήρωσης**. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο**

γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα

και είναι **πραγματικός αριθμός**, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα **σύνολο συναρτήσεων**.



Γεωμετρική ερμηνεία (ορισμένου ολοκληρώματος)

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δίνει το **εμβαδόν** $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη **γραφική παράσταση της f** τον άξονα x και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\text{Αν } f(x) \geq 0, \text{ τότε } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0.$$

4. Να γράψετε τις ιδιότητες του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

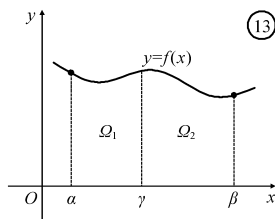
$$\text{Αν } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

β) Έστω f, g **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \text{ και γενικά}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

γ) Αν η f είναι **συνεχής** σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Σημείωση: Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:
 $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

δ) Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f **δεν είναι παντού μηδέν** στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

5. Έστω $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in \Delta$, όπου f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα Δ . Ποια είναι η σχέση της F με τη συνάρτηση f ;

Απάντηση

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in \Delta$, είναι συνεχής και είναι μια παράγουσα της f στο Δ .

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

6. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μια **παράγουσα** της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η G είναι μια **παράγουσα** της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και
 άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

7. Να γράψετε τους τύπους της παραγοντικής ολοκλήρωσης και της αντικατάστασης για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Απάντηση

α) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

β) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι **συνεχείς** συναρτήσεις,
 $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

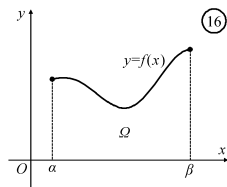
Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Έστω f, g δύο **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Αν $f(x) > g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

8. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το **εμβαδόν του χωρίου Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής.



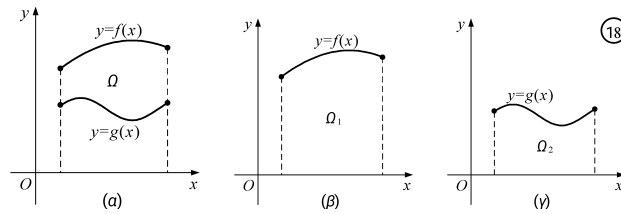
Απάντηση

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη **γραφική παράσταση της f** , τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

9. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το **εμβαδόν του χωρίου Ω** που ορίζεται που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$, όταν $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς.

Απάντηση

Έστω δυο **συνεχείς** συναρτήσεις f και g , στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις **γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$** (Σχ. 18α).



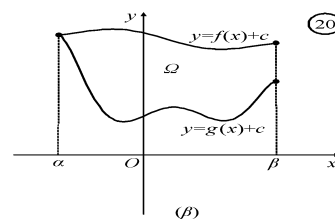
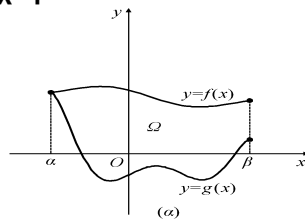
Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$.

Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$.

10. Να αποδείξετε ότι αν για τις συναρτήσεις f, g είναι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το **εμβαδόν** του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ δίνεται από τον τύπο: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$.

Απόδειξη

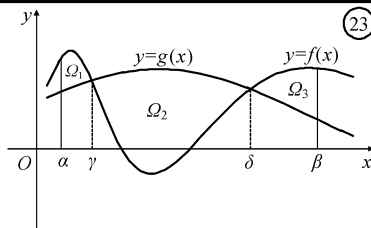
Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι **συνεχείς στο** $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το **χωρίο Ω** (Σχ. 20α) έχει το **ίδιο εμβαδόν** με το χωρίο Ω' .



Επομένως, θα έχουμε: $E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x) + c) - (g(x) + c)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$. Άρα

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx.$$

11. Να αποδείξετε ότι όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ **δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο** στο $[\alpha, \beta]$, τότε το **εμβαδόν** του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx$.

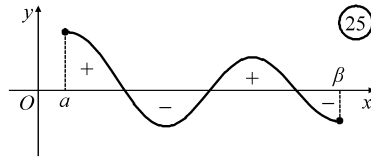


Απόδειξη

Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις **γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες**

$x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_{\alpha}^{\gamma} (f(x) - g(x))dx + \int_{\gamma}^{\delta} (g(x) - f(x))dx + \int_{\delta}^{\beta} (f(x) - g(x))dx \\ &= \int_{\alpha}^{\gamma} |f(x) - g(x)|dx + \int_{\gamma}^{\delta} |f(x) - g(x)|dx + \int_{\delta}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx \end{aligned}$$

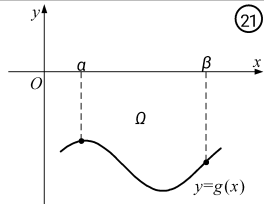


Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$

Σχόλιο

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25).

12. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με: $E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$



Απόδειξη

Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx. \text{ Επομένως, αν για μια συνάρτηση } g \text{ ισχύει}$$

$$g(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \text{ τότε: } E(\Omega) = - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$