

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

- актуализировать знания о тригонометрии: синус, косинус, тангенс, котангенс;
- расширить знания учеников за счет включения новых определений: синус двойного угла, косинус двойного угла, синус половинного угла, косинус половинного угла, тангенс половинного угла;
- познакомиться с задачами на тригонометрические тождества.

План занятия:

1. Сумма и разность тригонометрических функций
2. Синус и косинус двойного угла.
3. Формулы половинного угла.

1. Сумма и разность тригонометрических функций.

Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Сумма и разность синусов

Представим сами углы в виде суммы полусумм и полуразностей.

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус полуразности.

В сумме $\sin \alpha + \sin \beta$ заменим α и β на выражения для этих углов, приведенные выше.

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

Теперь к первому выражению применяем формулу сложения, а ко второму - формулу синуса разностей углов:

$$\sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) &= \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ &+ \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \end{aligned}$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и получим искомую формулу:

$$\begin{aligned} &\left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус полусуммы.

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) &= \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ &- \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Сумма и разность косинусов.

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы и косинуса полуразности этих углов.

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) &= \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ &+ \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов, взятому с отрицательным знаком.

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) &= \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ &- \left(\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \right) = \\ &= -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

Пример

Задание 1. Проверка формулы суммы синусов двух углов

$$\alpha = \pi/2, \beta = \pi/6$$

$$\sin(\pi/2) + \sin(\pi/6) = 1 + 1/2 = 3/2$$

$$\sin(\pi/2) + \sin(\pi/6) = 2\sin((\pi/2 + \pi/6)/2)\cos((\pi/2 - \pi/6)/2) = 2\sin(\pi/3)\cos(\pi/6) = 2 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{3}/2 = 3/2$$

Задание 2. Рассмотрим теперь случай, когда значения углов отличаются от основных значений, представленных в таблице. Пусть $\alpha = 165^\circ$, $\beta = 75^\circ$. Вычислим значение разности синусов этих углов.

Применение формулы разности синусов

$$\alpha = 165^\circ, \beta = 75^\circ$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= \sin 165^\circ - \sin 75^\circ = 2 \cdot \sin((165^\circ - 75^\circ)/2) \cos((165^\circ + 75^\circ)/2) = \\ &= 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 120^\circ = 2 \cdot \sqrt{2}/2 \cdot (-1/2) = -\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

2. Синус и косинус двойного угла.

Из самого названия следует, что аргумент функции будет умножен на 2.

Но математики уже позаботились о нас, и чтобы мы не мучились, вывели формулы, по которым просто преобразовать двойной угол и перейти к обычному аргументу. Рассмотрим их.

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

Доказательство формул берет начало из формул сложения. Применим формулы синуса суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

И косинуса суммы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Заметили, что косинус выделился и тут? На самом деле, у него целых три формулы для двойного угла. Попробуем вывести еще две. Для этого вернемся к основному тригонометрическому тождеству и выразим квадрат косинуса:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Теперь подставим полученное выражение в формулу косинуса двойного угла:

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Аналогичным способом выведем формулу двойного угла только через косинусы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Пример

1. Найдите значение выражения:

$$\frac{36 \sin 102^\circ \cdot \cos 102^\circ}{\sin 204^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{36 \cdot \sin 102^\circ \cdot \cos 102^\circ}{\sin 204^\circ} = \frac{18 \cdot \sin 204^\circ}{\sin 204^\circ} = 18$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{12 \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{12 \cdot \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{6 \cdot \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = 6$$

3. Найдите значение выражения:

$$\frac{50 \sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{50 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{50 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{50}{2} = 25$$

4. Найдите значение выражения:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{24(-\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = -24$$

5. Найдите значение выражения:

$$\frac{22(\sin^2 72^\circ - \cos^2 72^\circ)}{\cos 144^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{22(\sin^2 72^\circ - \cos^2 72^\circ)}{\cos 144^\circ} = \frac{22(-\cos 144^\circ)}{\cos 144^\circ} = -22$$

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{4(\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ)}{\cos 64^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{4(\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ)}{\cos 64^\circ} = \frac{4(-\cos 64^\circ)}{\cos 64^\circ} = -4$$

7. Найдите значение выражения:

$$\frac{22(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ}$$

Решение. Используем формулу $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\frac{22(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ} = \frac{-22(\cos 18^\circ)}{\cos 18^\circ} = -22$$

8. Найдите значение выражения:

$$\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} &= \frac{18(1 - \cos^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} = \\ &= \frac{18(1 - 2\cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} = \frac{-18(2\cos^2 24^\circ - 1)}{\cos 48^\circ} = \frac{-18\cos 48^\circ}{\cos 48^\circ} = -18 \end{aligned}$$

9. Найдите значение выражения:

$$\frac{7(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{7(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} &= \frac{7(1 - \cos^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} = \\ &= \frac{7(1 - 2\cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} = \frac{-7(2\cos^2 11^\circ - 1)}{\cos 22^\circ} = \frac{-7\cos 22^\circ}{\cos 22^\circ} = -7 \end{aligned}$$

10. Найдите $\frac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0,7$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha} = \frac{4\sin 2\alpha}{5} = \frac{4 \cdot (-0,7)}{5} = -0,56$$

3. Формулы половинного угла.

Стандартные формулы половинного угла:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Доказательство формул половинного угла

$$\cos \alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Для начала запишем и разберем формулы, с помощью которых можно выразить $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ через тангенс половинного угла:

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\alpha \neq \pi + 2\pi \cdot z$$

Пример

Пример 1. Известно, что $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. Необходимо вычислить значение $\cos 15$ градусов, используя формулы половинного угла.

Решение. Данный пример рассматривает применение формулы половинного угла

для косинуса, имеющей вид $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

Следуя из условия, подставляем числовые значения и получаем:

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

После получения значения косинуса 15 градусов, необходимо найти само значение косинуса. Для этого вспомним, что угол в 15 градусов принадлежит первой четверти. Там косинус угла имеет положительное значение (чтобы вспомнить знаки тригонометрических функций, необходимо повторить теорию знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям). Следуя из вышесказанного, имеем

$$\cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad \text{тогда} \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Сформулируйте формулы суммы и разности тригонометрических функций.
- 1.2. Сформулируйте вывод формулы синуса двойного угла.
- 1.3. Сформулируйте вывод формулы косинуса двойного угла
- 1.4. Сформулируйте вывод формулы синуса половинного угла.
- 1.5. Сформулируйте вывод формулы косинуса половинного угла.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Найдите значение выражения:

$$\text{A) } \frac{-10 \sin 97^\circ \cdot \cos 97^\circ}{\sin 194^\circ}; \quad \text{B) } \frac{28 (\sin^2 47^\circ - \cos^2 47^\circ)}{\cos 94^\circ}$$

Б) $\frac{16 \sin 112^\circ \cdot \cos 112^\circ}{\sin 224^\circ}$; Г) $\frac{8(\sin^2 71^\circ - \cos^2 71^\circ)}{\cos 142^\circ}$

2.2. Найдите $\frac{3 \sin 6\alpha}{5 \cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0,7$

Работы принимаются до 22 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 15.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 15.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.

