Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 54 **Группа БУ и ТД 1/1-9/25** **Дата: 15.01.2026**
Тип занятия: практическое занятие 26 **Преподаватель:** Бережная В.А.
Тема занятия: Основные тригонометрические тождества

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.
Содержательная:
– актуализировать знания о тригонометрии: синус, косинус, тангенс, котангенс;
– расширить знания учеников за счет включения новых определений: синус двойного угла, косинус двойного угла, синус половинного угла, косинус половинного угла, тангенс половинного угла;
– познакомиться с задачами на тригонометрические тождества.
План занятия:
1. Сумма и разность тригонометрических функций
2. Синус и косинус двойного угла.
3. Формулы половинного угла.

1. Сумма и разность тригонометрических функций.

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Сумма и разность синусов

Представим сами углы в виде суммы полусумм и полуразностей.

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}$$
$$\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$$

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус полуразности.

В сумме sinα+sinβ заменим α и β на выражения для этих углов, приведенные выше.

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Теперь к первому выражению применяем формулу сложения, а ко второму - формулу синуса разностей углов:

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и получим искомую формулу:

$$\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус полусуммы.

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$-\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Сумма и разность косинусов.

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы и косинуса полуразности этих углов.

$$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих углов, взятому с отрицательным знаком.

$$\cos\alpha-\cos\beta=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Пример

Задание 1. Проверка формулы суммы синусов двух углов

$\alpha = \pi/2$, $\beta=\pi/6$

$\sin(\pi/2)+\sin(\pi/6)=1+1/2=3/2$

$\sin(\pi/2)+\sin(\pi/6)=2\sin((\pi/2+\pi/6)/2)\cos((\pi/2-\pi/6)/2)=2\sin(\pi/3)\cos(\pi/6)=2\cdot\sqrt{3}/2\cdot\sqrt{3}/2=3/2$

Задание 2. Рассмотрим теперь случай, когда значения углов отличаются от основных значений, представленных в таблице. Пусть $\alpha=165°$, $\beta=75°$. Вычислим значение разности синусов этих углов.

Применение формулы разности синусов

$\alpha=165°$, $\beta=75°$

$\sin\alpha-\sin\beta=\sin165°-\sin75°=2\cdot\sin((165°-75°)/2)\cos((165°+75°)/2)=$

$=2\cdot\sin45°\cdot\cos120°=2\cdot\sqrt{2}/2\cdot(-1/2)=\sqrt{2}/2$

2. Синус и косинус двойного угла.

Из самого названия следует, что аргумент функции будет умножен на 2.

Но математики уже позаботились о нас, и чтобы мы не мучились, вывели формулы, по которым просто преобразовать двойной угол и перейти к обычному аргументу. Рассмотрим их.

$$\sin\ 2\alpha = 2\cdot\sin\ \alpha\cdot\cos\ \alpha$$

$$\cos\ 2\alpha = \cos^2\ \alpha - \sin^2\ \alpha,$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\cdot tg\ \alpha}{1-tg^2\ \alpha}$$

$$ctg\ 2\alpha - \frac{ctg^2\ \alpha-1}{2\cdot ctg\ \alpha}$$

Доказательство формул берет начало из формул сложения. Применим формулы синуса суммы:

$$\sin\ (\alpha+\beta) = \sin\ \alpha\ \cdot\cos\ \beta + \cos\ \alpha\cdot\sin\ \beta$$

$$\sin\ (\alpha+\alpha) = \sin\ \alpha\ \cdot\cos\ \alpha + \cos\ \alpha\cdot\sin\ \alpha = 2\cdot\sin\ \alpha\cdot\cos\ \alpha$$

И косинуса суммы:

$$\cos\ (\alpha+\beta) = \cos\ \alpha\ \cdot\cos\ \beta - \sin\ \alpha\cdot\sin\ \beta$$

$$\cos\ (\alpha+\alpha) = \cos\ \alpha\ \cdot\cos\ \alpha - \sin\ \alpha\cdot\sin\ \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Заметили, что косинус выделился и тут? На самом деле, у него целых три формулы для двойного угла. Попробуем вывести еще две. Для этого вернемся к основному тригонометрическому тождеству и выразим квадрат косинуса:

$$sin^2x + cos^2x = 1 => cos^2x = 1 - sin^2x$$

Теперь подставим полученное выражение в формулу косинуса двойного угла:

$$cos(2x) = cos^2x - sin^2x = (1 - sin^2x) - sin^2x = 1 - 2sin^2x$$

Аналогичным способом выведем формулу двойного угла только через косинусы:

$$sin^2x + cos^2x = 1 => sin^2x = 1 - cos^2x$$

$$cos(2x) = cos^2x - sin^2x = cos^2x - (1 - cos^2x) = cos^2x - 1 + cos^2x = 2cos^2x - 1$$

Пример

1. Найдите значение выражения:

$$\frac{36\sin 102^\circ \cdot \cos 102^\circ}{\sin 204^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{36 \cdot \sin 102^\circ \cdot \cos 102^\circ}{\sin 204^\circ} = \frac{18 \cdot \sin 204^\circ}{\sin 204^\circ} = 18$$

2. Найдите значение выражения:

$$\frac{12\sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{12 \cdot \sin 11^\circ \cdot \cos 11^\circ}{\sin 22^\circ} = \frac{6 \cdot \sin 22^\circ}{\sin 22^\circ} = 6$$

3. Найдите значение выражения:

$$\frac{50\sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$$

Решение. Используем формулу синуса двойного угла $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$:

$$\frac{50\sin\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{50\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{50}{2} = 25$$

4. Найдите значение выражения:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{24(-\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = -24$$

5. Найдите значение выражения:

$$\frac{22(\sin^2 72^\circ - \cos^2 72^\circ)}{\cos 144^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{22(\sin^2 72^\circ - \cos^2 72^\circ)}{\cos 144^\circ} = \frac{22(-\cos 144^\circ)}{\cos 144^\circ} = -22$$

6. Найдите значение выражения:

$$\frac{4(\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ)}{\cos 64^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{4(\sin^2 32^\circ - \cos^2 32^\circ)}{\cos 64^\circ} = \frac{4(-\cos 64^\circ)}{\cos 64^\circ} = -4$$

7. Найдите значение выражения:

$$\frac{22(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ}$$

Решение. Используем формулу $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$$\frac{22(\sin^2 9^\circ - \cos^2 9^\circ)}{\cos 18^\circ} = \frac{-22(\cos 18^\circ)}{\cos 18^\circ} = -22$$

8. Найдите значение выражения:

$$\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{18(\sin^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} = \frac{18(1 - \cos^2 24^\circ - \cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} =$$

$$= \frac{18(1 - 2\cos^2 24^\circ)}{\cos 48^\circ} = \frac{-18(2\cos^2 24^\circ - 1)}{\cos 48^\circ} = \frac{-18\cos 48^\circ}{\cos 48^\circ} = -18$$

9. Найдите значение выражения:

$$\frac{7(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{7(\sin^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} = \frac{7(1 - \cos^2 11^\circ - \cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} =$$

$$= \frac{7(1 - 2\cos^2 11^\circ)}{\cos 22^\circ} = \frac{-7(2\cos^2 11^\circ - 1)}{\cos 22^\circ} = \frac{-7\cos 22^\circ}{\cos 22^\circ} = -7$$

10. Найдите $\frac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = -0,7$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{2\sin 4\alpha}{5\cos 2\alpha} = \frac{2 \cdot 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{5\cos 2\alpha} = \frac{4\sin 2\alpha}{5} = \frac{4 \cdot (-0,7)}{5} = -0,56$$

3. Формулы половинного угла.

Стандартные формулы половинного угла:

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$ctg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

Доказательство формул половинного угла

$\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha = 2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$$tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$ctg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Для начала запишем и разберем формулы, с помощью которых можно выразить sinα, cosα, tgα, ctgα через тангенс половинного угла:

$$\sin\ \alpha = \frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\ \alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad ctg = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\ \alpha = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$\cos\ \alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

$$a \neq \pi + 2\pi\cdot z$$

Пример

Пример 1. Известно, что cos30°=√3/2. Необходимо вычислить значение cos15 градусов, используя формулы половинного угла.

Решение. Данный пример рассматривает применение формулы половинного угла для косинуса, имеющей вид $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

Следуя из условия, подставляем числовые значения и получаем:

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

После получения значения косинуса 15 градусов, необходимо найти само значение косинуса. Для этого вспомним, что угол в 15 градусов принадлежит первой четверти. Там косинус угла имеет положительное значение (чтобы вспомнить знаки тригонометрических функций, необходимо повторить теорию знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям). Следуя из вышесказанного, имеем

$\cos^2 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ тогда $\cos\ 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Сформулируйте формулы суммы и разности тригонометрических функций.

1.2. Сформулируйте вывод формулы синуса двойного угла.

1.3. Сформулируйте вывод формулы косинуса двойного угла

1.4. Сформулируйте вывод формулы синуса половинного угла.

1.5. Сформулируйте вывод формулы косинуса половинного угла.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Найдите значение выражения:

А) $\frac{-10\sin 97^\circ\cdot\cos 97^\circ}{\sin 194^\circ}$; В) $\frac{28\left(\sin^2 47^\circ - \cos^2 47^\circ\right)}{\cos 94^\circ}$

Б) $\dfrac{16\sin 112^\circ \cdot \cos 112^\circ}{\sin 224^\circ}$; Г) $\dfrac{8(\sin^2 71^\circ - \cos^2 71^\circ)}{\cos 142^\circ}$

2.2. Найдите $\dfrac{3\sin 6\alpha}{5\cos 3\alpha}$, если $\sin 3\alpha = 0,7$

Работы принимаются до 22 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 15.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 15.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.