

1.-

a) Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 & 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de

uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P = \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 & 34 & 37 & 55 \end{pmatrix}$

Calcule el producto QP^t y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

Resolución

Llamemos T, G y M a las uvas Tempranillo, Garnacha y Macabeo, respectivamente y F_1, F_2 a las fincas

$T \quad G \quad M \quad Q = F_1 \quad F_2 \quad \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 & 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ representa los miles de kg y

$T \quad G \quad M \quad P = F_1 \quad F_2 \quad \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 & 34 & 37 & 55 \end{pmatrix}$ representa el precio de

venta por kilogramo, en céntimos de euro.

$$\begin{matrix} T & G & M \\ F_1 & F_2 \end{matrix} Q P^t = \begin{matrix} F_1 & F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 & 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_1 & F_2 \\ T & G & M \end{matrix} \begin{pmatrix} 40 & 34 & 38 & 37 & 42 & 55 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4990 & 5105 & 4590 & 5245 \end{pmatrix} \text{ representa los céntimos de € por 1000 kg}$$

Los elementos de la diagonal principal son 4990 y 4420.

Significado:

En la 1ª finca se han recaudado 49,90 € . 1000 = 49900 €

En la 2ª finca se han recaudado 52,45 € . 1000 = 52450 €

Por la venta de la cosecha de las dos fincas ha obtenido 49900 + 52450 = 102350 €

b) Dada la siguiente ecuación matricial $MX + N = V$

b1) Suponiendo que M sea invertible, despeje la matriz X en la ecuación anterior.

Resolución

Trasponiendo términos, $MX = V - N$. Multiplicando por M^{-1} , por la izquierda, en los dos miembros:

$$M^{-1}MX = M^{-1}(V - N) \Rightarrow IX = M^{-1}(V - N) \Rightarrow X = M^{-1}(V - N)$$

b2) Para $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz X.

Resolución

Como $\det M = 1 \neq 0$, existe M^{-1} y $M^{-1} = \frac{1}{\det M} (\text{adj } M^t) = \frac{1}{1} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- Una conservera fabrica latas de pisto con tomate, cebolla y pimiento siguiendo dos recetas distintas. La matriz $\begin{pmatrix} 500 & 300 & 200 & 600 & 100 & 300 \end{pmatrix}$ indica los gramos necesarios de cada producto para conseguir una lata de

cada receta. Se dispone de dos proveedores, siendo la matriz de precios en euros por kilo de cada

producto $(0, 5 \ 0, 4 \ 0, 6 \ 0, 4 \ 0, 5 \ 0, 7)$. Los costes de producción de cada receta en euros por lata vienen dados por la matriz $(0, 11 \ 0, 09)$. Los costes de transporte en euros por lata según cada proveedor vienen dados por la matriz $(0, 02 \ 0, 03)$. La conservera quiere obtener un beneficio de 5 céntimos por lata. Una distribuidora compra 11000 latas de la primera receta, siendo 5000 del primer proveedor, y otras 11000 de la segunda receta, siendo 6000 del primer proveedor. ¿Cuánto debe cobrar la conservera por el pedido de esta distribuidora?

Resolución

Llamemos T , C y P al tomate, cebolla y pimiento, respectivamente, R_1 , R_2 a las recetas y P_1 , P_2 a los proveedores

$T \quad C \quad P \quad P = R_1 \ R_2 \ (500 \ 300 \ 200 \ 600 \ 100 \ 300)$ representa los gramos, que en kg es
 $T \quad C \quad P \quad P = R_1 \ R_2 \ (0, 5 \ 0, 3 \ 0, 2 \ 0, 6 \ 0, 1 \ 0, 3)$

$T \quad G \quad M \ Q = P_1 \ P_2 \ (0, 5 \ 0, 4 \ 0, 6 \ 0, 4 \ 0, 5 \ 0, 7)$ representa los precios de los productos en cada proveedor

$T \quad C \quad P \quad P Q^t = R_1 \ R_2 \ (0, 5 \ 0, 3 \ 0, 2 \ 0, 6 \ 0, 1 \ 0, 3) \quad P_1 \ P_2 \ T \ C \ P \ (0, 5 \ 0, 4 \ 0, 4 \ 0, 5 \ 0, 6 \ 0, 7)$
 $= P_1 \quad P_2 \ R_1 \ R_2 \ (0, 49 \ 0, 49 \ 0, 52 \ 0, 50)$ representa el precio de cada receta con cada proveedor

Con el proveedor 1 la receta 1 cuesta 0,49 por lata y la receta 2 cuesta 0,52 por lata.

Con el proveedor 2 la receta 1 cuesta 0,49 por lata y la receta 2 cuesta 0,50 por lata.

Sumamos los costes de transporte según proveedor y la producción por lata según receta:

$$P_1 \quad P_2 \ R_1 \ R_2 \ (0, 49 \ 0, 49 \ 0, 52 \ 0, 50) + P_1 \quad P_2 \ R_1 \ R_2 \ (0, 11 \ 0, 11 \ 0, 09 \ 0, 09) + P_1 \quad P_2 \ R_1 \ R_2 \ (0, 02 \ 0, 03 \ 0, 02 \ 0, 03)$$

Las 11000 latas de la primera receta (5000 del proveedor 1 y 6000 del proveedor 2) y otras 11000 de la segunda (6000 del proveedor 1 y 5000 del proveedor 2) cuestan un total:

$$5000 \cdot 0,62 + 6000 \cdot 0,63 + 6000 \cdot 0,63 + 5000 \cdot 0,62 = 13760$$

Es decir, El pedido cuesta un total de 13760 €

3.- a) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ m & -2 & 1 & m \\ 4 & & & \end{pmatrix}$

a1) Obtenga para qué valores de m la matriz tiene inversa.

Resolución $\det A = 4m + 2 + 2m = 6m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$. Para $m \neq -\frac{1}{3}$ A tiene inversa

a2) Calcule, en caso de existir, la inversa de A para $m = 1$.

Resolución

Para $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & & & \end{pmatrix}$. Como $\det A = 6 \cdot 1 + 2 = 8 \neq 0$, existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A^t) = \frac{1}{8} \text{adj} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & -2 & 4 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

b) Despeje y simplifique en la ecuación $XB - B^2 + B = 0$, sabiendo que la matriz B es invertible.

Resolución

Trasponiendo términos, $XB = B^2 - B$. Como existe B^{-1} , Multiplicando por B^{-1} , por la derecha, en los dos miembros: $XB B^{-1} = X I = X = (B^2 - B) B^{-1} = B B B^{-1} - B B^{-1} = B I - I = B - I$. Es decir, $X = B - I$

4.- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 & 7 & 0 & 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & -2 & 0 & 11 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Halle las dimensiones de las siguientes matrices $C^t A C$, $A C C^t B$.

Resolución $A_{3 \times 3}$, $B_{3 \times 3}$, $C_{3 \times 1}$ y $C_{1 \times 3}^t \Rightarrow C_{1 \times 3}^t \cdot A_{3 \times 3} \cdot C_{3 \times 1}$ orden 1×1 ; $A_{3 \times 3} \cdot C_{3 \times 1} \cdot C_{1 \times 3}^t \cdot B_{3 \times 3}$ orden 3×3

b) Calcule, en caso de existir, las inversas de las matrices A y B.

Resolución

Como $\det A = 126 - 60 - 49 = 17 \neq 0$, existe A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A^t) = \frac{1}{17} \text{adj} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 & -7 & 0 & 3 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -12 & 11 & -28 & 7 & -5 & 22 & 21 & -15 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{17} & \frac{11}{17} & -\frac{28}{17} & \frac{7}{17} & -\frac{5}{17} & \frac{22}{17} & \frac{21}{17} & -\frac{15}{17} & \frac{49}{17} \end{pmatrix}$$

Como $\det B = 72 - 44 - 28 = 0$, NO existe B^{-1}

c) Resuelva el siguiente sistema matricial $\{2X + 3Y = A - 3X + 4Y = B$

Resolución

$\{2X + 3Y = A - 3X + 4Y = B \quad . \quad 3 \cdot 2 \quad \{6X + 9Y = 3A - 6X + 8Y = 2B \quad . \quad \text{Sumando, } 17Y = 3A + 2B. \text{ Luego, } Y = \frac{1}{17}(3A + 2B)$

$$Y = \frac{1}{17} [3 \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 & 7 & 0 & 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & -2 & 0 & 11 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}] = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -17 & 0 & 17 & 0 & 34 & 0 & 17 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{2X + 3Y = A - 3X + 4Y = B \quad . \quad 4 \cdot 3 \quad \{8X + 12Y = 4A - 9X + 12Y = 3B \quad . \quad \text{Restando, } 17X = 4A - 3B. \text{ Luego,}$

$$X = \frac{1}{17}(4A - 3B)$$

$$X = \frac{1}{17} [4 \begin{pmatrix} 5 & -7 & 6 & 7 & 0 & 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & -2 & 0 & 11 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}] = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -34 & 51 & 34 & 0 & -17 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- (prueba ordinaria) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & a & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.

Resolución

$$\det A = a^2 - 2a = a(a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{ó} \quad a = 2 \quad ; \quad \det B = -2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 2$ tanto A como B tienen inversa

b) Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $AXB = C$.

Resolución

Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que sabemos por el apartado anterior que tienen inversa.

$$\det A = 1(1 - 2) = -1 \quad ; \quad \det B = -2 + 1 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (\text{adj} B)^t = \frac{1}{-1} (-1 \ -1 \ 1 \ 2)^t = -(-1 \ 1 \ -1 \ 2) = (1 \ -1 \ 1 \ -2)$$

Multiplicando por A^{-1} , por la izquierda, y por B^{-1} , por la derecha en los dos miembros,
 $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$. Luego, $IXI = X = A^{-1}CB^{-1} = (1 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ -1)(2 \ -1 \ 1 \ -1 \ 2 \ 0)(1 \ -1 \ 1 \ -2)$

$$\text{Operando, } X = (-1 \ -2 \ 3 \ 1 \ -1 \ -1)(1 \ -1 \ 1 \ -2) = (-3 \ 5 \ 4 \ -5 \ -2 \ 3)$$

6.- (prueba extraordinaria) Se considera la matriz $A = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)$

a) Pruebe que se verifica que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$

Resolución

Veamos que $A \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)A = I$ y entonces se tendría

$$\text{que } A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)$$

$$A \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) \frac{1}{2} [(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) - 4(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) + 5(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)]$$

$$= \frac{1}{2}(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)[(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ -3 \ 1) - 4(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) + 5(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)] = \frac{1}{2}(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)(2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)$$

$$= \frac{1}{2}(2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = I$$

$$\frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I_3)A = \frac{1}{2}[(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) - 4(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) + 5(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)](1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1)$$

$$= \frac{1}{2}[(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 0 \ -3 \ 1) - 4(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) + 5(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)](1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1) = \frac{1}{2}(2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)$$

$$= \frac{1}{2}(2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = I$$

b) Dada la ecuación matricial $X^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

Resolución

$$\left(X^t\right)_{m \times n}, A_{3 \times 3} \text{ y } \left(X^t A\right)_{2 \times 3} \Rightarrow n = 3 \text{ y } m = 2. \text{ Luego, } X_{3 \times 2}$$

Sabemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y del (a) que $A^{-1} = \frac{1}{2} \left(A^2 - 4A + 5I_3 \right) = \frac{1}{2} (2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)$

Multiplicando por A^{-1} , por la derecha en los dos miembros de la ecuación,

$$X^t A A^{-1} = X^t I = X^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) = \frac{1}{2} (2 \ 2 \ 0 \ 6 \ 0 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \ 0 \ 3 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la solución de la ecuación es $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$.