9 класс

№ 1. Есть два бидона, в первом из них 1 л молока, второй бидон пустой. Последовательно проводятся переливания из первого бидона во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемого молока составляет последовательно 1/2, 1/3, 1/4 и т. д. от количества молока в бидоне, из которого молоко отливается. Сколько молока будет в бидонах после 2021 переливания?

Ответ. В бидонах будет по ½ л молока.

Решение.

«Просчитав» несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих бидонах будет по ½ л молока. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером 2k-1 в бидонах было по ½ л, то при следующем переливании из второго бидона берется 1/(2k + 1) часть, так что в первом бидоне оказывается 1/2 + (2/ 2(2k + 1)) = (k + 1)/(2k + 1) (л). При следующем переливании, имеющем номер 2k+1, из него берется 1/(2k + 2) часть и остается (k + 1)/(2k + 1)-(k + 1)/((2k + 1)(2k + 1)) = 1/2 (л). Поэтому после седьмого, девятого и вообще любого нечетного переливания в бидонах будет по ½ л молока.

№ 2 . Найдите действительные решения уравнения: $(x+2)^4+x^4=82$.

Ответ.1 и -3.

Решение. Обозначим x + 1 = y, тогда x + 2 = y + 1, x = y – 1. Исходное уравнение примет вид $(y + 1)^4+ (y – 1)^4= 82$. $y^4+ 6y^2– 40 = 0$, откуда $y^2= = - 10$ (это уравнение не имеет корней) или $y^2= 4$. Тогда y = - 2 или y = 2. Следовательно, x + 1 = - 2 или x + 1 = 2. В итоге получаем корни 1 и – 3.

№ 3. Электромобиль едет сначала 2 мин с горы, а затем 6 мин в гору. Обратный путь он проделывает за 13 мин. Во сколько раз скорость электромобиля при движении с горы больше, чем скорость при движении· в гору? (Считайте, что скорость при движении с горы (в гору) одинакова в обоих направлениях.)

Ответ: 6.

Решение.

Пусть скорость электромобиля при движении с горы равна x км/мин, а при движении в гору - y км/мин. Тогда на пути туда электромобиль едет с горы с горы 2x км, а в гору - 6y км. На обратном пути расстояние 6y км (т.е. путь с горы) электромобиль преодолевает за 6y /x мин, а расстояние 2x км (т.е. путь в гору) – за 2x/y мин. Всего обратный путь занимает 13 мин. Получаем уравнение: 6y /x + 2x/y = 13. Из этого уравнения нужно найти отношение x/y. Введя замену x/y = t, получим уравнение с одной переменной: 2t + 6/t = 13. Решив его, найдем, t_1= 6, t_2 = 0,5. Так как скорость электромобиля при движении с горы больше, чем при движении в гору, то подходит только корень t_1= 6 Таким образом, x/y = 6.

№ 4. Одна коробка карандашей стоит 10 рублей. В каждой коробке находится купон, причем за 3 купона покупателю выдается такая же коробка карандашей бесплатно. Какое максимальное число коробок карандашей можно получить за 150 рублей.

Ответ: 22 коробки

Решение. Пусть удалось получить x коробок карандашей. Значит, всего у нас было x купонов (в каждой коробке – 1 купон). Каждая из этих коробок была куплена за деньги, либо получена за купоны. За деньги можно купить не более 150 : 10 = 15 коробок, за купоны – не более $x/3$ коробок. Следовательно, $x \leq 15 + x/3$, откуда $x \leq 22,5$. Так как x – целое число, то $x \leq 22$.

№ 5. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую-то клетку не сядет ни одного жука.

Решение.

Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Тогда у нас 25 клеток покрашены в черный цвет, а 24 – в белый. Заметим, что жук, взлетевший с белой клетки, сядет на черную клетку, а взлетевший с черной клетки – на белую. Но с белых клеток взлетело 24 жука, и они не смогут сесть на 25 клеток.

8 класс

№1. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, длины катетов которого являются корнями квадратного уравнения

$2x^2 – 20x+21=0$.

Решение:

По теореме Пифагора, квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Согласно теореме Виета, сумма корней данного уравнения равна 10, произведение 10,5. Тогда сумма квадратов корней равна:

$10^2 - 2\cdot 10{,}5=79$. Длина гипотенузы равна $\sqrt{79}$.

Ответ: $\sqrt{79}$

№2. Среди чисел *a, b, c* нет равных. При этом выполнены равенства:
$a(b + c) + c = b(c + a) + a = c(a + b) + b$
Найдите численное значение произведения *abc*.

Решение. Преобразуем первое равенство: $ab + ac + c = bc + ab + a$, откуда
$c(a – b) = a– c$.
Аналогично, из равенства $b(c + a) + a =c(a–b) + b$ получим
$a(b–c)=b–a$, (2)
а из равенства $c(a +b) + b= a(b+ c) + c$ – что
$b(c– a)= c – b$ (3)
Почленно перемножив равенства (1), (2) и (3), будем иметь:
$abc(a - b)(b - c)(c - a) =(a -c)(b-a)(c-b)$, или, равносильно,
$abc(a - b)(b - c)(c -a) = -(a- b)(b - c)(c - a)$.
Так как по условию все числа различны, то попарные разности между ними отличны от нуля, так, что, сократив обе части последнего равенства на $(a –b)(b–c)(c –a) \neq 0$, получим: $abc = — 1$.
Ответ: –1.

№3. Найдите значение выражения $\frac{20}{21!}+\frac{21}{22!}+\frac{23}{24!}+\ ...\ +\frac{2021}{2022!}$.

(Запись n! обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до **n** включительно, n!=1·2·3·…·n) **Ответ может содержать факториалы конечных чисел.**

Решение:

Представим каждую дробь как разность следующим образом:

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$.

Получим:

$\frac{20}{21!}+\frac{21}{22!}+\frac{23}{24!}+\ ...\ +\frac{2021}{2022!}=$

$=\frac{1}{20!}-\frac{1}{21!}+\frac{1}{21!}-\frac{1}{22!}+\ldots+\ \frac{1}{2021!}-\frac{1}{2022!}=\frac{1}{20!}-\frac{1}{2022!}$

Ответ: $\frac{1}{20!}-\frac{1}{2022!}$

№4. Найдите все натуральные двузначные числа $\overline{ab}$, десятичная запись квадрата которых имеет вид $\overline{\text{xy}ab}$, где x, y – некоторые цифры, x≠0.

Решение.

Имеем: $\overline{\text{xy}ab}=100\overline{\text{xy}}+\overline{ab}=\overline{ab}^2$, значит, $100\overline{\text{xy}}=\overline{ab}^2-\overline{ab}=\overline{ab}(\overline{ab}-1)$.
Поэтому произведение $\overline{ab}(\overline{ab}-1)$ должно делиться на 100, а, значит, на 2^2 и 5^2.
Так как числа $\overline{ab}$ и $(\overline{ab}-1)$ взаимно-простые, то они не имеют общих делителей (кроме 1) и поэтому равенство возможно, только если одно из этих чисел делится на 4, а второе – на 25. Т.к. оба числа двузначные, то ни одно из них не может делиться на 100. Значит, $\overline{ab}$ может принимать значения:
25,50,75 (если $\overline{ab}$ делится на 25) или 26,51,76 (если $(\overline{ab}-1)$ делится на 25)
Возводя каждое в квадрат, получим соответственно:
625, 2500, 5625, 676, 2601, 5776. Видим, что условию удовлетворяет только 76.
Ответ: 76.

№5. Однажды Смешарики Копатыч, Лосяш и Пин пошли на рыбалку. Улов оказался большим. Пин поймал половину от общего улова без $\frac{2}{5}$ того, что поймали вместе Лосяш и Копатыч. Копатыч поймал треть от общего улова и $\frac{1}{5}$ того, что поймали вместе Пин и Лосяш. Улов Лосяша отличается от улова Копатыча на 1 кг. Сколько весил общий улов?

Решение:
Пусть общий улов весил S кг и Пин поймал x кг, а
Копатыч поймал y кг. Вследствие условия получаем уравнение
$x = \frac{1}{2} S - \frac{2}{5} (S — x)$, откуда находим, что $x = \frac{1}{6} S$. Аналогично, из уравнения
$y = \frac{1}{3} S + \frac{1}{5}(S — y)$ найдём, что $y = \frac{4}{9} S$. Тогда Лосяш поймал $S - \frac{1}{6} S - \frac{4}{9} S = \frac{7}{18} S$, что отличается от улова Копатыча, $\frac{4}{9} S$
на $\frac{1}{18}S$. Согласно условию, $\frac{1}{18}S = 1$кг, откуда S= 18 кг.
Ответ: 18 кг.

7 класс

№1.Два года назад брат был старше сестры в два раза, а 8 лет назад – в 5 раз. Сколько лет брату и сколько сестре сейчас?

Ответ: сестре – 10 лет, а брату – 18 лет.

Решение. Два года назад возраст сестры был равен разности возрастов брата и сестры. Восемь лет назад возраст сестры был в 4 раза меньше этой разности. Значит, за 6 лет возраст сестры увеличился в 4 раза: было x лет, стало $4x$ лет, добавилось $3x = 6$ лет. Откуда $x = 2$, т.е.8 лет назад сестре было 2 года, а сейчас ей 10 лет. Брату 8 лет назад было 10 лет, а сегодня ему 18 лет.

№2.Андрей выписал первую тысячу натуральных чисел в тетрадь следующим образом: сначала записал в порядке возрастания числа с суммой цифр 1 (это 1, 10, 100 и 1000), затем выписал в порядке возрастания числа с суммой цифр 2, потом – в порядке возрастания с суммой цифр 3 и т.д. На каком месте оказалось число 978?

Ответ: 988

Решение. Выписанные числа имеют сумму цифр от 1 до 27. Сумма цифр числа 978 равна 24. Причем самое большое из выписанных чисел с такой суммой цифр – 996, а после него идут 987 и 978.
Сумма цифр 27 имеет только число 999.
Сумму цифр 26 имеют 3 числа: 998, 989, 899.
Сумму цифр 25 имеют 6 чисел: 997, 979, 799, 988, 898, 889.
Таким образом, перед числом 996 записано 12 чисел. Значит, оно оказалось на месте с номером 1000 – 12 = 988.

№3.Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного

бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного – ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка теперь хватит одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется).

Ответ: на 15 банок

Решение.

1. Первый способ. На банку напитка уходит $\frac{1}{6}$ бидона яблочного и $\frac{1}{10}$ бидона виноградного сока, значит, объем банки равен

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{4}{15}$$

объема бидона.

После изменения рецептуры на банку напитка уходит $\frac{1}{5}$ бидона яблочного и $\frac{1}{x}$ бидона виноградного сока, значит, объем банки равен

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x}$$

объема бидона. Итак, мы получаем уравнение:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{x}=\frac{4}{15}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{15}-\frac{1}{5}=\frac{1}{15}.$$

Значит, $x=15$.

Второй способ. На 30 банок было затрачено 5 бидонов яблочного и 3 бидона виноградного сока. Итого 8 бидонов. По новой рецептуре на 30 банок затратят 6 бидонов яблочного сока. Значит, виноградного сока затратят 2 бидона. Итак, бидона виноградного сока хватит на 15 банок.

№4. Из города А в город В одновременно выехали два мотоциклиста Петров и Иванов, и в тот же момент из города В навстречу им выехали мотоциклисты Ивановский и Петровский. Иванов едет в два раза быстрее Петрова, а Ивановский - в три раза быстрее Петровского. Иванов встретил Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского. Чья встреча произошла ближе к городу А : Иванова с Ивановским или Петрова с Петровским?

Ответ: встреча Иванова с Ивановским.

Решение. Пусть a – скорость Петрова, b – скорость Петровского. Тогда скорость Иванова - 2a, скорость Ивановского - 3b. Так как Иванов встретил

Петровского в тот же момент, когда Петров встретил Ивановского, то S/(2a+b)=S/(a+3b), откуда следует, что a=2b.

Встреча Петрова с Петровским произошла через промежуток времени, равный S/(a+b)=S/3b, а встреча Иванова с Ивановским – через S/(2a+3b)=S/7b. Петров до этой встречи проехал расстояние, равное Sa/3b, а Иванов - 2Sa/7b. Так как Sa/3b>2Sa/7b, то ближе к городу А встретились Иванов с Ивановским.

№5. У Вани были оловянные солдатики. Сначала Ваня построил их в ряды по 8 солдатиков в каждом, но последний ряд оказался неполным. Затем Ваня построил их в ряды по 7 в каждом. Рядов стало на 2 больше, и все они были полными. Наконец, Ваня построил солдатиков по 5 в каждом ряду. Теперь рядов стало еще на 7 больше, но последний ряд опять не был заполнен до конца. Сколько солдатиков было у Вани?

Ответ: 119 солдатиков.

1 способ. Пусть у Вани было *n* солдатиков и когда он их построил их в ряды по 8, у него получилось *к* рядов. Так как последний ряд был неполным, то $n < 8k$ (1). Когда он их построил в ряды по 7, то получилось *к* + 2 ряда, т. е. $n = 7(k+2)$ (2). Когда же он их построил в ряды по 5, то получилось *к* + 9 рядов. Так как последний ряд был неполным, то $n < 5(k+9)$ (3). Выражение для *n* из (2) подставим в (1) и (3). Получим: $7(k+2) < 8k$ и $7(k+2) < 5(k+9)$. Отсюда $k > 14$ и $k < 15{,}5$. Так как *к* – целое число, то *к* = 15. Тогда из (2) находим $n = 7(15+2) = 119$.

2 способ. Пусть Ваня построил x рядов по 7 солдатиков. Тогда получаем следующие равенства: (1) $7x = 8(x - 3) + k$ и (2) $7x = 5(x + 6) + m$. Откуда получаем, что $\frac{m}{2} = 9 - k$; $m = 18 - 2k$. Так как m – четное и может принимать значения 2 или 4, то $k = 8$ или $k = 7$. Условия задачи удовлетворяет пара $k = 7$ и $m = 4$. Следовательно, $x = 17$, т.е. у Вани было 119 солдатиков.