

Лекція 1

Короткий зміст: Вступ в теоретичну механіку. Вступ в статику. Елементи векторної алгебри: поняття вектора, властивості векторів, праві і ліві системи координат, скалярний і векторний добуток двох векторів.

Вступ

Теоретична механіка – це наука, в якій вивчаються механічні рухи речових форм матеріальних об'єктів.

Теоретичну механіку називають ще класичною механікою або механікою Ньютона.

Механічний рух – це переміщення матеріальних об'єктів в просторі з часом без розгляду фізичних властивостей цих об'єктів і їх зміни в процесі руху.

Теоретична механіка вивчає тільки речові форми матеріальних об'єктів. Елементарні частинки і різні поля не є предметом вивчення в теоретичній механіці.

Рух матеріальних об'єктів відбувається в просторі і в часі. Простір є тривимірним простором Евкліда.

Теоретична механіка є базою для інших розділів механіки (теорії пружності, опори матеріалів, теорії механізмів і машин та ін.) і багатьох технічних дисциплін.

Теоретична механіка ділиться на три частини: статику, кінематику і динаміку. Головною частиною є динаміка.

Вивчення теоретичної механіки зазвичай починається із статки.

Статика

Вступ

Статика - це розділ теоретичної механіки, в якому висловлюється загальне вчення про сили і вивчаються умови рівноваги матеріальних тіл, що знаходяться під дією сил.

Під рівновагою тіла в статистиці розуміється стан його спокою по відношенню до інших тіл, що приймаються за нерухомі.

Елементи векторної алгебри

У теоретичній механіці розглядаються такі векторні величини як сила, моменти сили щодо точки і осі, момент пари сил, швидкість, прискорення та інші.

1. Поняття вектора

Для визначеності розглянемо прямокутну декартову систему координат.

Вектор - це направлений відрізок, який характеризується довжиною і напрямком.

Операції над векторами. Вектори можна складати і множити на число.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ сума двох векторів є вектор,

$\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$ добуток вектора на дійсне число є вектор,

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ існує нульовий вектор.

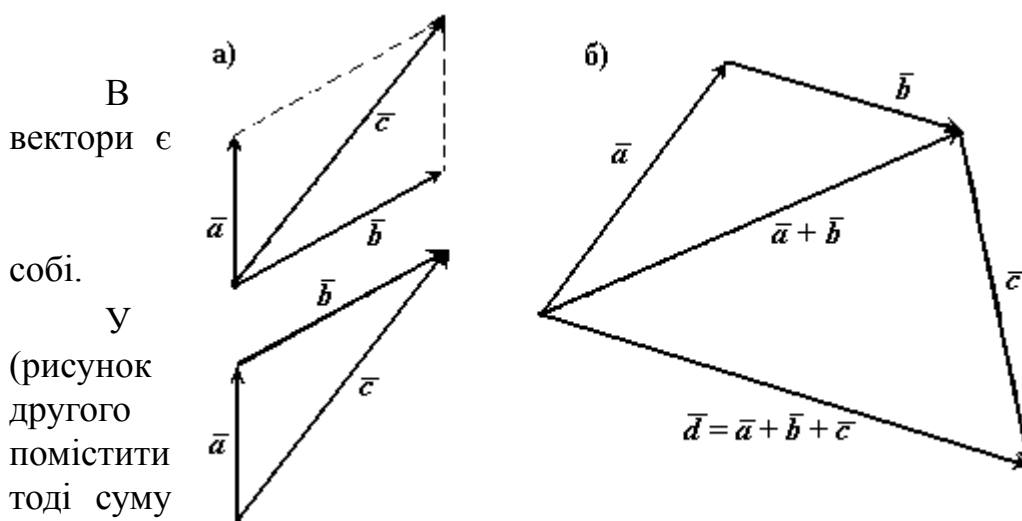


Рисунок 1-1

математиці всі вільними, їх можна переносити паралельно самим

сумі двох векторів 1-1а) початок вектора можна в кінець першого, двох векторів можна представити як

вектор, що має начало на початку першого вектора, а кінець - в кінці другого вектора. Застосовуючи це правило для суми декількох векторів (рисунок 1-1б) отримуємо, що сумою декількох векторів є вектор, що замикає ламану лінію, що складається з складових векторів.

Операції над векторами підкоряються наступним законам (рисунок 1-2):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$$

$$\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b} \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

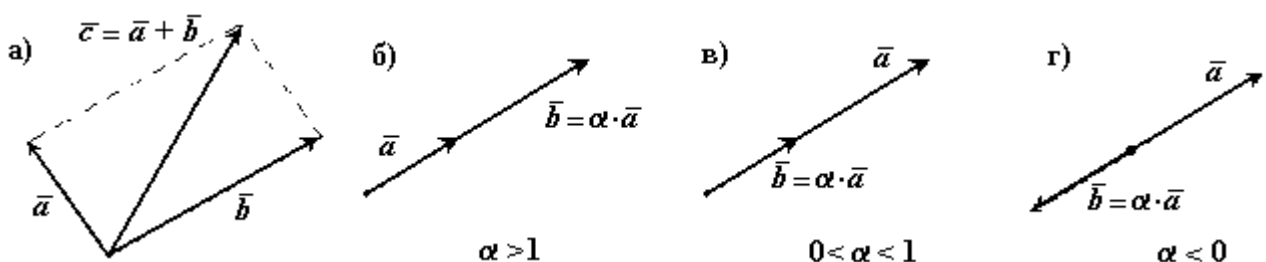


Рисунок 1-2

2. Праві і ліві системи координат

Декартові системи координат діляться на два види: *праву і ліву*.

Розглянемо Декартові системи координат на площині (рисунок 1-3).

При повороті осі Ox правої системи координат на 90° проти годинникової стрілки вона співпадає з віссю Oy .

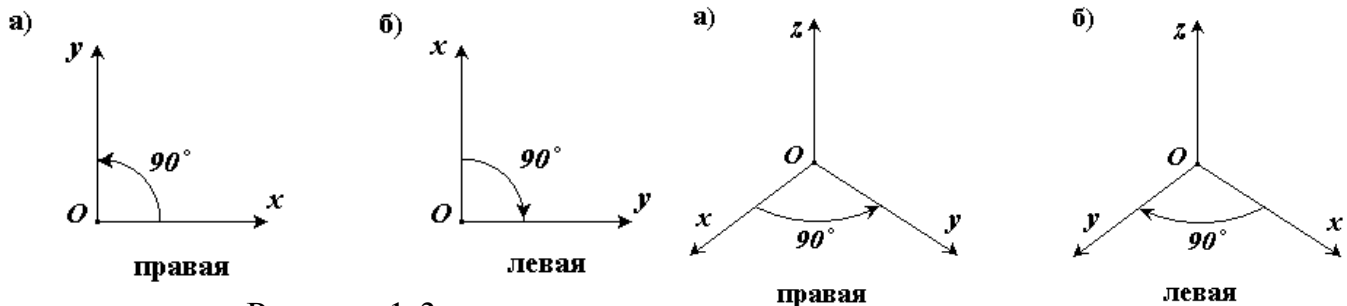


Рисунок 1-3

Рисунок 1-4

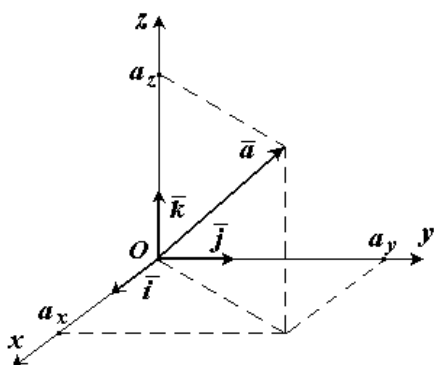
Розглянемо Декартові системи координат в просторі (рисунок 1-4).

При повороті осі Ox правої системи координат навколо осі Oz на 90° проти годинникової стрілки вона співпадає з віссю Oy .

3. Довжина проекції і направляючі косинуси вектора

Надалі розглядатимемо праву Декартову систему координат. Одиничні вектори уздовж осей Ox , Oy і Oz утворюють систему одиничних (або базисних) векторів. Будь-який вектор, що має початок у точці O можна представити як суму $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, числа (a_x, a_y, a_z) - це проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат (рисунок 1-5).

Довжина (або модуль) вектора $\vec{a}$ визначається формулою $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ і позначається a або $|\vec{a}|$.



Проекцією вектора на вісь називається скалярна величина, яка визначається відрізком, що відсікається перпендикулярами, опущеними з початку і кінця вектора на цю вісь. Проекція вектора вважається позитивною (+), якщо напрям її співпадає з позитивним напрямом осі, і негативною (-) - якщо проекція направлена в протилежну сторону (рисунок 1-6).

Рисунок 1-5

Направляючими косинусами $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ вектора називаються косинуси кутів між вектором і позитивними напрямками осей Ox , Oy і Oz відповідно.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}$$

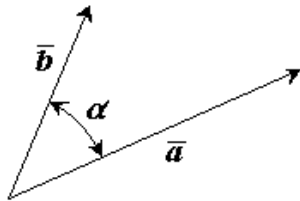
Будь-яка точка простору з координатами (x, y, z) може бути задана своїм радіус-вектором

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Координати (x, y, z) це проекції вектора $\vec{r}$ на осі координат.

4. Скалярний добуток двох векторів

Є два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.



Результатом скалярного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є скалярна величина.

Записується як $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$. Скалярний добуток двох векторів дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.

Рисунок 1-7

Властивості скалярного добутку:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

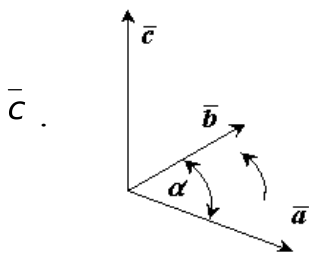
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \end{aligned}$$

5. Векторний добуток двох векторів

Є два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.



Результатом векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор

Записується як $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторний добуток двох векторів - це вектор $\vec{c}$, перпендикулярний обом цим векторам, і направлений так, щоб

з його кінця поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ був видний проти годинникової стрілки.

Рисунок 1-8

Довжина (або модуль) векторного добутку дорівнює $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$.

Властивості векторного добутку:

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= -\bar{b} \times \bar{a} & \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) &= \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \\ (\alpha \cdot \bar{a}) \times \bar{b} &= \alpha \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) & \bar{a} \times \bar{a} &= 0 \\ \bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) &= 0\end{aligned}$$

Векторний добуток двох векторів обчислюється через їх проекції таким чином:

$$\begin{aligned}\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = \\ &= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \bar{i} + (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z) \cdot \bar{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

$$c_x = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y)$$

$$c_y = (a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z)$$

$$c_z = (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x)$$