

1.- Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & a & -1 & -1 & 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Determine para qué valores de "a" tiene inversa la matriz A.

Resolución

Para que exista la inversa el determinante debe ser no nulo.

$$\det A = 4a - 3 - 3 + 2a^2 = 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0,$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}, a = 1 \quad a = -3$$

Luego, para  $a \neq 1$ ,  $a \neq -3$  la matriz A tiene inversa

b) Para  $a = 2$ , calcule la matriz inversa de A.

Resolución

Para  $a = 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 6 = 10 \neq 0$ . Luego, existe  $A^{-1}$ .

$$m.c(A) = (|-1 \ -1 \ 0 \ -4| \ |2 \ -1 \ 3 \ -4| \ |2 \ -1 \ 3 \ 0| \ |1 \ -1 \ 0 \ -4| \ |2 \ -1 \ 3 \ -4| \ |2 \ 1 \ 3 \ 0| \ |1 \ -1 \ 1 \ 0|)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)^t.$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 5 & -5 & 0 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

c) Para  $a = 0$ , resuelva la ecuación matricial  $XA^{-1} - BB^t = I_3$ .

Resolución

Para  $a = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = -6 \neq 0$ . Luego, existe  $A^{-1}$ .

$$\text{Como } XA^{-1} - BB^t = I_3 \Rightarrow XA^{-1} = BB^t + I_3.$$

$$\text{Multiplicando por A por la derecha: } XA^{-1}A = (BB^t + I_3) \cdot A \Rightarrow X \cdot I_3 = (BB^t + I_3) \cdot A \Rightarrow X = (BB^t + I_3) \cdot A$$

$$X = \{ (1 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1 \ -2)(1 \ 2 \ 1 \ -1 \ 0 \ -2) + (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \} (2 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 3 \ 0 \ 0) =$$

$$= \{ (2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 4 \ 2 \ 3 \ 2 \ 5) + (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \} (2 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 3 \ 0 \ 0) =$$

$$(3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 5 \ 2 \ 3 \ 2 \ 6)(2 \ 1 \ -1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 3 \ 0 \ 0) \Rightarrow X = (15 \ 1 \ -5 \ 10 \ -3 \ -7 \ 24 \ 1 \ -5)$$

2.- Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = AA^t$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , siendo a un parámetro real.

a) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?

Resolución

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & a & a & a^2 & +1 \end{pmatrix}$ . Para que exista la inversa el determinante debe ser no nulo.

Pero  $\det B = 5a^2 + 5 - a^2 = 4a^2 + 5 \neq 0$ . Luego, para todo valor de a la matriz B tiene inversa

b) Para  $a = 1$ , calcule la inversa de la matriz B.

Resolución

Para  $a = 1$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $\det B = 9 \neq 0$ .

$$m. c(B) = (5 \ 1 \ 1 \ 2) \Rightarrow adj(B) = (2 \ -1 \ -1 \ 5); B^{-1} = \frac{1}{\det B} adj(B)^t. \text{ Luego,}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{9} (2 \ -1 \ -1 \ 5) = \left( \frac{2}{9} \ -\frac{1}{9} \ -\frac{1}{9} \ \frac{5}{9} \right)$$

c) Para  $a = 1$ , resuelva la ecuación matricial  $B^t X + 9C = 0$

### Resolución

Restando  $9C$  en los dos miembros,  $B^t X = -9C$ .

Como  $\det B^t = \det B = 9 \neq 0$ , existe  $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t = \frac{1}{9} (2 \ -1 \ -1 \ 5)$ .

Multiplicando por ella a la izquierda se obtiene:  $(B^t)^{-1} B^t X = (B^t)^{-1} (-9C) \Rightarrow IX = -9(B^t)^{-1} C$

$$X = -9(B^t)^{-1} C \Rightarrow X = -9 \frac{1}{9} (2 \ -1 \ -1 \ 5) (1 \ -2 \ 1 \ 0) = - (1 \ -4 \ 4 \ 2) = (-1 \ 4 \ -4 \ -2)$$

3.- Se consideran las matrices  $A = (1 \ 0 \ 1 \ k \ -3 \ 2 \ 1 \ k \ 1)$ ,  $B = (3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)$  y  $C = (-2 \ 4 \ 1 \ 3)$

a) Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:  $B^t A$     $CB$     $BA + B$     $B^2$

### Resolución

1)  $B^t A$ , NO: Como  $B_{2 \times 3}$  y  $B_{3 \times 2}^t$ , entonces  $B_{3 \times 2}^t \cdot A_{3 \times 3}$  no se puede realizar porque el nº de columnas de  $B^t$ , que es 2, no coincide con el nº de filas de  $A$ , que es 3.

2)  $CB$ , Sí:  $C_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$  sí se puede realizar porque el nº de columnas de  $C$ , que es 2, coincide con el nº de filas de  $B$ , que también es 2. La matriz resultante tiene orden  $2 \times 3$

3)  $BA + B$ , Sí:  $B_{2 \times 3} \cdot A_{3 \times 3}$  sí se puede realizar porque el nº de columnas de  $B$ , que es 3, coincide con el nº de filas de  $A$ , que también es 3.  $BA$  tiene orden  $2 \times 3$  y como  $A$  es del mismo orden, sí se puede hacer la suma. La matriz resultante tiene orden  $2 \times 3$

4)  $B^2$ , NO:  $B_{2 \times 3}$  no es cuadrada, luego no se puede realizar  $B^2 = B \cdot B$

b) Calcule los valores del parámetro  $k$  para los que la matriz  $A$  es invertible.

### Resolución

Para que  $A$  sea invertible el determinante debe ser no nulo.

$$\det A = -3 + k^2 + 3 - 2k = k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k - 2) = 0, k = 0, k = 2$$

Luego, para  $k \neq 0, k \neq 2$  la matriz  $A$  es invertible

c) Para  $k = -1$ , calcule la inversa de la matriz  $A$ .

### Resolución

Para  $k = -1$ ,  $A = (1 \ 0 \ 1 \ -1 \ -3 \ 2 \ 1 \ -1 \ 1)$ ,  $\det A = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0$ . Luego, existe  $A^{-1}$ .

$$m. c(A) = (|-3 \ 2 \ -1 \ 1| \ -1 \ 2 \ 1 \ 1| \ -1 \ -3 \ 1 \ -1| \ 0 \ 1 \ -1 \ 1| \ 1 \ 1 \ 1 \ 1| \ 1 \ 0 \ 1 \ -1| \ 0 \ 1 \ -3 \ 2| \ 1 \ 1 \ 1 \ 1|)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)^t. \text{ Luego, } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 3 & 0 & -3 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

4.- Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & m & 1 & 1 & 1 & m & 3 & 5 \end{pmatrix}$ , con m un parámetro real, se pide:

a) ¿Para qué valores del parámetro m tiene inversa la matriz A?

Resolución

Para que tenga inversa el determinante debe ser no nulo.

$$\det A = 10 + 3m - m^2 - 6 = -m^2 + 3m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2}, \quad m = -1 \quad m = 4$$

Luego, la matriz A tiene inversa para  $m \neq -1, m \neq 4$

b) Para  $m = 0$ , resuelva la ecuación matricial  $XA = AA^t$ .

Resolución

Como existe  $A^{-1}$ , multiplicamos por ella por la derecha:  $XA A^{-1} = AA^t A^{-1} \Rightarrow X = AA^t A^{-1}$

Para  $m = 0$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $\det A = -0^2 + 3 \cdot 0 + 4 = 4$ . Hallemos  $A^{-1}$ :

$$m. c(A) = (|1 \ 1 \ 3 \ 5| \ |1 \ 1 \ 0 \ 5| \ |1 \ 1 \ 0 \ 3| \ |0 \ 0 \ 3 \ 5| \ |2 \ 0 \ 0 \ 5| \ |2 \ 0 \ 0 \ 3| \ |0 \ 0 \ 1 \ 1| \ |2 \ 0 \ 1 \ 1| \ |2 \ 0 \ 1 \ 1|) = (2 \ 5 \ 3 \ 0 \ 10 \ 6 \ 2 \ 4 \ 4)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{A} \text{adj}(A)^t$$

$$\text{. Luego, } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -5 & 10 & -2 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = AA^t A^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \right\} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -5 & 10 & -2 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 3 & 8 & 0 & 8 & 34 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 20 & -4 & 13 & -18 & 10 & 62 & -124 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & -1 & \frac{13}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & \frac{31}{2} & -31 & 13 \end{pmatrix}$$

5.- (prueba ordinaria) Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican  $AX = B$  y  $BY = A$ .

a) Compruebe que  $Y^{-1} = X$ .

Resolución

Como  $AX = B$ , sustituyendo A por BY, se tiene que  $BYX = B$ . Como B es invertible, existe  $B^{-1}$ .

Multiplicamos por  $B^{-1}$  por la izquierda:  $B^{-1}BYX = B^{-1}B \Rightarrow IYX = I$ . Luego,  $YX = I$

Como  $BY = A$ , sustituyendo  $B$  por  $AX$ , se tiene que  $AXY = A$ . Como  $A$  es invertible, existe  $A^{-1}$ .

Multiplicamos por  $A^{-1}$  por la izquierda:  $A^{-1}AXY = A^{-1}A \Rightarrow IXY = I$ . Luego,  $XY = I$

Por tanto,  $XY = YX = I$ . Es decir, la inversa de  $Y$  es la matriz  $X$

b) Para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , halle  $X$  e  $Y$ .

### Resolución

Como  $AX = B$  y  $\det A = 1 \neq 0$ , existe  $A^{-1}$ . Multiplicamos por  $A^{-1}$  por la izquierda y queda

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$m. c(A) = (3 \ 1 \ 2 \ 1) \Rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)^t. \text{ Luego, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como  $Y$  es la inversa de  $X$ , la hallamos. Como  $\det X = -2 \neq 0$ , existe  $X^{-1}$ :

$$m. c(X) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(X) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}; X^{-1} = \frac{1}{\det X} adj(X)^t \Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\text{Luego, } Y = X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

**6.- (prueba extraordinaria)** Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple. La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz  $A$ , los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz  $D$  la demanda de los tres institutos.

### Resolución

Representemos por  $Ag1$  y  $Ag2$  a las agencias,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  a los institutos,  $I$  al número de habitaciones individuales,  $D$  el de dobles y  $T$  el de triples.

$$\begin{matrix} Ag1 & Ag2 & A = I D T (65 & 78 & 85 & 83 & 104 & 106) \\ I & D & T D = I_1 I_2 I_3 (3 & 15 & 2 & 2 & 12 & 5 & 1 & 16 & 7) \end{matrix},$$

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

**Resolución**

El precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas vendría dado por el producto

$$DA = I D T I_1 I_2 I_3 (3 \ 15 \ 2 \ 2 \ 12 \ 5 \ 1 \ 16 \ 7) \cdot Ag1 \ Ag2 I D T (65 \ 78 \ 85 \ 83 \ 104 \ 106)$$

$$DA = I_1 I_2 I_3 (3 \cdot 65 + 15 \cdot 85 + 2 \cdot 104 \ 3 \cdot 78 + 15 \cdot 83 + 2 \cdot 106 \ 2 \cdot 65 + 12 \cdot 85 + 5 \cdot 104 \ 2 \cdot 78 + 12 \cdot 83 + 5 \cdot 106)$$

que sería entonces la matriz que nos expresa el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas.

Observamos que al 1er y 2º instituto le interesa la agencia 1 y al 3er instituto le interesa la agencia 2.

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

**Resolución**

Para que exista la inversa el determinante debe ser no nulo.

$$\det D = 3 \cdot 12 \cdot 7 + 15 \cdot 5 \cdot 1 + 16 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 12 \cdot 1 - 15 \cdot 2 \cdot 7 - 16 \cdot 5 \cdot 3 = 252 + 75 + 64 - 24 - 210 - 240 = -83$$

Luego, existe la inversa de D.

La inversa de A no tiene sentido porque A no es cuadrada