

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з вищої математики за розділом
“Диференціальне числення функції однієї змінної”
для студентів 1 курсу спеціальностей 143 «Атомна енергетика»,
144 «Теплоенергетика» інституту енергетики (ІЕ)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Одеська політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять з вищої математики за розділом
“Диференціальне числення функції однієї змінної”
для студентів 1 курсу спеціальностей 143 «Атомна енергетика»,
144 «Теплоенергетика» інституту енергетики (ІЕ)

Затверджено
на засіданні кафедри
Вищої математики та
моделювання систем
Протокол № 1 від 30.08.24

Методичні вказівки до практичних занять з розділу “Диференціальне числення функції однієї змінної” для студентів 1 курсу спеціальностей 143 - Атомна енергетика, 144 - Теплоенергетика ІЕ / Укл.: М.І. Шпинковська, О.А. Шпинковський – Одеса: НУ «ОП», 2024. – 22 с.

Укладачі: М. І. Шпинковська, доцент, к.т.н.
О. А. Шпинковський, доцент, к.т.н.

Зміст	
<u>Практичне заняття № 1</u>	4
<u>Практичне заняття № 2</u>	5
<u>Практичне заняття № 3</u>	6
<u>Практичне заняття № 4</u>	8
<u>Практичне заняття № 5</u>	9
<u>Практичне заняття № 6</u>	9
<u>Практичне заняття № 7</u>	11
<u>Практичне заняття № 8</u>	13
<u>Практичне заняття № 9</u>	15
<u>Практичне заняття № 10</u>	15
<u>Практичне заняття № 11</u>	16
<u>Практичне заняття № 12</u>	17
<u>Практичне заняття № 13</u>	18
<u>Практичне заняття № 14</u>	19
<u>Практичне заняття № 15</u>	20
<u>Література</u>	22

Практичне заняття № 1

Тема: «ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ. ПРАВИЛО БЕРНУЛЛІ-ЛОПІТАЛЯ»

Питання для контролю

1. Сформулюйте теорему Ролля, дайте її геометричну ілюстрацію.
2. Сформулюйте теорему Лагранжа, дайте її геометричну ілюстрацію.
3. Запишіть формулу скінченних прирістів на $[x_0, x_0 + \Delta x]$.
4. Сформулюйте теорему Коші, дайте її геометричну ілюстрацію.
5. Чи можна з формули Коші дістати формулу Лагранжа?
6. Чи можна формулу Коші дістати діленням двох формул Лагранжа?
7. Сформулюйте правило Бернуллі-Лопіталя для розкриття невизначенностей вигляду

$$\frac{0}{0} \text{ та } \frac{\infty}{\infty}.$$

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Показати, що функція $f(x)=x^2-1$ на відрізку $[-1,1]$ задовольняє умовам теореми Ролля. Знайти всі стаціонарні точки цієї функції.

Відповідь. 0.

Задача 2. Нехай $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Довести, що всі три кореня рівняння $f'(x)$ дійсні.

Задача 3. Довести, що рівняння $e^x - 1 + x - 2 = 0$, яке має корінь $x = 1$ (перевірте!), не має інших дійсних коренів. Вказівка. Провести доведення методом від супротивного, встановив, що похідна лівої частини рівняння не має дійсних коренів.

Задача 4. Записав формулу Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ на відрізку $[0,1]$. Знайти на інтервалі $(0, 1)$ відповідне значення ξ .

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 5. Записав формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ та $g(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0, 2]$, Знайти значення ξ .

Відповідь. $\xi_1 = 1/2, \xi_2 = 5/3$.

Розкрити невизначенності вигляду $\frac{0}{0}$:

Задача 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x-1}}{\arcsin 3x}$.

Відповідь. $\frac{2}{3}$.

Задача 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$.

Відповідь. $\frac{a^2}{b^2}$.

Задача 8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctgx} - 1}{\sin 4x}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Розкрити невизначенності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$:

Задача 9.. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^m} \quad (m > 0)$.

Відповідь. 0.

Задача 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Задача 11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos x \cdot \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)}$

Відповідь. $\cos 3$.

Домашнє завдання:

Практичне заняття № 2

Тема: «РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРАВИЛА БЕРНУЛЛІ-ЛОПІТАЛЯ»

Питання для контролю

1. Яким способом невизначенності $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ можна звести до невизначенностей $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$?
2. Яким способом невизначенності вигляду 1^∞ , 0^0 , ∞^0 можна звести до невизначенності $0 \cdot \infty$?

Задачі для розв'язання в аудиторії

Розкрити невизначенності вигляду $0 \cdot \infty$:

Задача 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) \cdot \operatorname{ctgx}$.

Відповідь. 0.

Задача 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}$.

Відповідь. a

Задача 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Відповідь. 0.

Розкрити невизначенності вигляду $\infty - \infty$:

Задача 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctgx}} - \frac{1}{x} \right)$

Відповідь. 0.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctgx}} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$$

Задача 5.

Відповідь. -1.

Розкрити невизначенності вигляду 0^0 , ∞^0 , 1^∞ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin x$$

Задача 6.

Відповідь. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

Задача 7.

Відповідь. e.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$$

Задача 8.

Відповідь. 2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$$

Задача 9.

Відповідь. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

Задача 10.

Відповідь. e .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$$

Задача 11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^x$$

$$x \rightarrow 0$$

Відповідь.

$$e^2$$

Домашнє завдання:

Практичне заняття № 3

Самостійна робота з теми: «ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРАВИЛА БЕРНУЛЛІ-ЛОПІТАЛЯ»

(20 хвилин)

Варіант 1. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^x \quad (a > 0).$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

Варіант 2. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot \ln x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos mx)^{\frac{\pi}{x^2}}$$

Варіант 3. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctgx} \quad 3. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{3}{x^{4 + \ln x}}$$

Варіант 4. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

Варіант 5. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x \quad 3. \lim_{x \rightarrow +0} (\cos 2x)_{x^2}^{\frac{3}{2}}$$

Варіант 6. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$$

Відповіді: В.1. – 1) 1; 2) $\ln a$; 3) 1.

В.2. – 1) $4/7$; 2) 0; 3)

В.3. – 1) $\ln a$; 2) 0; 3) e^3 .

В.4. – 1) 2; 2) $2/\pi$; 3) 1.

$$\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$$

В.5. – 1) $\frac{\pi \sqrt{3}}{6}$; 2) 1; 3) e^{-6} .

В.6. – 1) 0; 2) $1/3$; 3) 1.

Тема: «ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА»

Питання для контролю

1. Сформулюйте теорему о представленні функції формулою Тейлора.
2. Запишіть для $f(x)$ формулу Тейлора з залишковим членом у формі Пеано.
3. Запишіть для $f(x)$ формулу Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа.
4. Запишіть формулу Маклорена для функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$.
5. Дайте визначення головної частини функції в околі точки x_0 .
6. Перерахуйте відомі вам застосування формули Тейлора.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Багаточлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ розкласти по ступеням двочлена $(x + 1)$.

Відповідь. $-9 + 17(x + 1) - 9(x + 1)^2 + 2(x + 1)^3$.

Задача 2. Записати формулу Маклорена для функції $y = \ln(1 + x)$.

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \quad x > -1.$$

Відповідь.

Задача 3. Записати формулу Тейлора 2-го порядку для функції $y = \operatorname{tg} x$ в точці $a = 0$. Побудувати графіки данної функції та її багаточлена Тейлора другого ступеня.

$$x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 \theta x}{\cos^4 \theta x}$$

Відповідь.

Задача 4. Обчислити з абсолютною похибкою, що не перевершує 0,001, наближене значення числа $\sin 1$.

Відповідь. 0,842.

Задача 5. Використовуючи розкладання по формулі Маклорена, обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}$.
Відповідь. $\frac{1}{2}$.

Задача 6. Показати, що розкладання по формулі Маклорена для функцій $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$, $\ln(1 + x)$ можна записати у вигляді $x + o(|x|)$ та що при $x \rightarrow 0$ всі ці функції еквівалентні нескінченно малій $\alpha(x) = x$ (і, отже, еквівалентні між собою).

Практичне заняття № 4

Тема: “ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА МОНОТОННІСТЬ та ЕКСТРЕМУМ, ОПУКЛІСТЬ, УГНУТІСТЬ ”

Питання для контролю

1. Дайте визначення зростаючої (спадної) функції.
2. Дайте визначення точки максимуму (мінімуму) функції.
3. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
4. Сформулюйте достатню умову екстремуму неперервної функції.
5. Як знайти найменше та найбільше значення функції, неперервної на відрізку?
6. Дайте визначення опуклого (угнутого) графіка функції.
7. Сформулюйте достатні умови опуклості (угнутості) графіка функції.
8. Дайте визначення точок перегину.
9. Сформулюйте достатню умову точок перегину.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Знайти інтервали зростання та спадання та точки екстремуму функції

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Відповідь. На $] -1, -1/\sqrt{2} [\cup] 1/\sqrt{2}, 1 [$ функція спадає, на $] -1/\sqrt{2} [\cup] 1/\sqrt{2} [$ -

функція зростає. $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -0,5$, $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 0,5$.

Задача 2. Знайти інтервали зростання та спадання та точки екстремуму функції $y = x - 2 \ln x$.

Відповідь. На $]0, 2 [$ - функція спадає, на $]2, +\infty [$ - зростає. $y_{\min} = y(2) = 2 - 2 \ln 2$.

Задача 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = -3x^4 + 6x^2$ на відрізку $[-2, 2]$.

Відповідь. $y_{\max} = y(-1) = y(1) = 3$, $y_{\min} = y(-2) = y(2) = -24$.

Задача 3⁰. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ в усій області визначення.

Відповідь. $y_{\max}_{x \in D(f)} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $y_{\min}_{x \in D(f)} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$,

Задача 4. Периметр осевого перерізу циліндра дорівнює $6a$. Знайти найбільший об'єм такого циліндра.

Відповідь. πa^3 .

Задача 4⁰. На параболі $y = x^2$ знайти точку N , найменш віддалену від прямої $y = 2x - 4$.

Відповідь. $N(1, 1)$.

Вказівка. Записати відстань від точки $N(x, x^2)$ до прямої $y - 2x + 4 = 0$.

Задача 5. Знайти інтервали опуклості та точки перегику графіка функції $y = x^4 + 6x^2$.

Відповідь. Графік всюди опуклий вниз.

Задача 6. Знайти інтервали опуклості та точки перегику графіка функції $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

Відповідь. На $]-\infty, 2[$ функція опукла вгору, на $]2, +\infty[$ угнута вниз. $M(2, 3)$ – точка перегику.

Задача 7. Знайти інтервали опуклості та точки перегику графіка функції $y = x^3 \ln x + 1$.

Відповідь. На $]0, e^{-\frac{5}{6}}[$ – функція опукла вгору, на $]e^{-\frac{5}{6}}, +\infty[$ – угнута вниз.

$M\left(e^{-\frac{5}{6}}, 1 - \frac{5}{6e^2\sqrt{e}}\right)$ – точка перегику.

Домашнє завдання: .

Практичне заняття № 5

Тема: “АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ. ПОБУДОВА ГРАФІКОВ ФУНКЦІЙ”

Питання для контролю

1. Яка пряма називається асимптотою графіка функції?
2. Як розрізняють асимптоти?
3. Запишіть рівняння похилої асимптоти.
4. Вкажіть схему дослідження функції для побудови її графіка.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Знайти асимптоти графіка функції $y = 3x + \arctg 5x$.

Відповідь. $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ (права), $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ (ліва)

Задача 2. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

Відповідь. $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ (права)

Задача 3. Побудувати графік функції $y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$.

Відповідь. $y_{\min} = y(3) = \frac{27}{8}$ (0,0) – точка перегику, $x = 1$, $y = \frac{(x+2)}{2}$ – асимптоти.

Задача 3⁰. Побудувати графік функції $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
Відповідь. (0,0) – точка перегину, $y = 1$ – ліва асимптота.

Задача 4. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{x \ln x}$.
Відповідь. $y_{\max} = y(e)$, $x = 1$ – асимптота, $x = 0$, $y = 0$ – праві асимптоти.

Практичне заняття № 6

Тема: «ВЕКТОРНА ФУНКЦІЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТУ. КРИВИЗНА ПЛОСКОЇ КРИВОЇ, РАДІУС КРИВИЗНИ, ЦЕНТР КРИВИЗНИ, ЕВОЛЮТА, ЕВОЛЬВЕНТА»

Питання для контролю

1. Дайте визначення векторної функції дійсної змінної.
2. Що називається годографом вектор – функції.
3. Дайте визначення похідної вектор – функції.
4. Сформулюйте правила диференціювання вектор – функції.
5. Запишіть рівняння дотичної та рівняння нормальної площини до кривої в данній точці.
6. Дайте визначення кривини плоской кривої в точці.
7. Запишіть формули для обчислення кривини плоской кривої в точці.
8. Що називається радіусом кривини, колом кривини, центром кривини?
9. Які координати центра кривини?
10. Що називається еволютою та евольвентой кривини?

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Знайти годограф вектор – функції $\vec{r} = \sqrt{1-t^2} \vec{i} + \sqrt{1+t^2} \vec{j}$, $t \in [0, 1]$

Відповідь. В площині Оху дуга кола $x^2 + y^2 = 2$ між точками (1,1) та $(0, \sqrt{2})$, що пробігає проти часової стрілки.

Задача 10. Знайти годограф вектор – функції $\vec{r} = 3t \cdot \vec{i} + (2t - t^2) \cdot \vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$

Відповідь. В площині Оху парабола $y = \frac{1}{9}(6x - x^2)$, пробігаємая зліва направо.

Задача 2. Знайти годограф вектор – функції $\vec{r} = 5 \cos t \cdot \vec{i} + 4 \sin t \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$; $t \in [0, 2\pi]$

Відповідь. Еліпс $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, $z = 2$.

Задача 3. Дано рівняння руху $\vec{r} = 2(t - \sin t) \cdot \vec{i} + 2(1 - \cos t) \cdot \vec{j}$. Визначити траєкторію

та швидкість руху. Побудувати вектори швидкості для моментів $t = \frac{\pi}{2}$; $t = \pi$.
Відповідь. Циклоїда (в площині Оху) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

$V = 2(1 - \cos t) \cdot \vec{i} + 2 \sin t \cdot \vec{j}$; при $t = \frac{\pi}{2}$; $V = 2(\vec{i} + \vec{j})$; при $t = \pi$, $V = 4 \cdot \vec{i}$.

Задача 4. Знайти похідну вектор-функції

$$\vec{r} = \sin t \cdot \vec{i} + \cos^2 t \cdot \vec{j} + \sin t \cdot \cos t \cdot \vec{k}.$$

Відповідь. $\cos t \cdot \vec{i} - \sin 2t \cdot \vec{j} + \sin t \cdot \cos 2t \cdot \vec{k}$.

Задача 5. Знайти похідну вектор-функції $\vec{r} = e^t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + (t^2 + 1) \cdot \vec{k}$; в точці (1,1,1).

Відповідь. $\square i$.

Задача 6. Знайти $\frac{a}{a^t} \left[\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} a, b \right]$, якщо $\square a = \square i + t \cdot \square j + t^2 \cdot \square k$, $\square b = t \cdot \square i + \square j + t^2 \cdot \square k$.
Відповідь. $(3t^2 - 2t) \square i + (3t^2 - 2t) \square j - 2t \cdot \square k$.

Задача 7. Записати рівняння дотичної та рівняння нормальної площини до кривої $x = \frac{1}{2} t^2$, $y = \frac{1}{3} t^3$, $z = \frac{1}{4} t^4$ при $t=2$.

Відповідь. $\frac{x-2}{1} = \frac{1-\frac{8}{3}}{2} = \frac{z-4}{4}$ - дотична; $3x + 6y + 12z - 70 = 0$ - нормальна площина.

Задача 7⁰. Записати рівняння дотичної та рівняння нормальної площини до кривої $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ в точці $M(1, 3, 4)$.

Відповідь. $\frac{x-1}{12} = \frac{1-3}{-4} = \frac{z-4}{4}$ - дотична; $12x - 4y + 3z = 12$ - нормальна площина.

Задача 8. Дано рівняння руху: $\square r = 2(t - \sin t) \square i + 2(1 - \cos t) \square j$. Визначити

прискорення руху. Побудувати вектори прискорення для моментів $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$.

Відповідь. $\square \omega = 2 \sin t \cdot \square i + 2 \cos t \cdot \square j$; $\square \omega = 2 \square i$ при $t = \frac{\pi}{2}$, $\square \omega = 2 \square j$ при $t = \pi$.

Задача 9. Обчислити кривизну кривої $y = x^2$ в початку координат та в точці $M(1, 1)$.

Відповідь. $k|_{x=0} = 2$, $k|_{x=1} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$.

Задача 9⁰. Обчислити кривизну кривої $x = 3 \cos t$, $y = \sin t$ в вершинах еліпса $A(3, 0)$ та $B(0, 1)$.

Відповідь. $k_A = 3$, $k_B = 1/9$.

Задача 10. Знайти радіус кривини кривої $r = a\phi$.

Відповідь. $\frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}$.

Задача 11. Обчислити координати центра кривини та записати рівняння кола кривини кривої $y = xe^x$ в точці $M(-1, 1/e)$.

Відповідь. $(-1, e - 1/e)$, $(x+1)^2 + (y-e+1/e)^2 = e^2$.

Задача 12. Знайти еволюту кривої $x = 2t$, $y = t^2 - 2$.

Відповідь. $x^2 = \frac{4}{27} y^3$.

Практичне заняття № 7

Типовий розрахунок №2 «ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ, ПОХІДНА»

Варіант 1

1. Дайте визначення зростаючої та спадної функцій. Сформулюйте умови зростання та спадання функції на відрізку.
2. Чому дорівнює похідна оберненої функції? Запишіть похідні обернених тригонометричних функцій.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

3. Знайти
4. Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіка функції $y = \ln(1 + x^2)$.
5. Обчислити $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, якщо $x = \arcsin t$, $y = \ln(1 - t^2)$.
6. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єма, котрий можна вписати в шар радіуса R.

Варіант 2

1. Дайте визначення точки перегину графіка функції та Сформулюйте достатні умови існування точки перегину.
2. Чому дорівнює похідна функції, заданої параметрично.
3. Побудувати графік функції $y = \frac{x}{1 + x^2}$.
4. Обчислити y' , якщо $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + x}$.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.
6. В якій точці дотична до параболи $y = x^3$: а) паралельна вісі Oх; б) утворює з вісью Oх кут в 45° ?

Варіант 3

1. Сформулюйте правило Бернуллі-Лопітала для розкриття невизначенностей вигляду $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.
2. Як Знайти найменше та найбільше значення функції, неперервної на відрізку?
3. Знайти асимптоти графіка функції $y = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.
4. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.
5. Знайти y' , якщо $y = 2 \ln(2x - 3 \sqrt{1 - 4x^2}) - 6 \arcsin 2x$.
6. Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Варіант 4

1. Дайте визначення максимуму, мінімуму функції. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму та достатні ознаки існування екстремуму.
2. Запишіть першу замечательну границю.
3. Обчислити $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, якщо $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ ($a = \text{const}$).
4. Побудувати графік функції $y = \ln(x^2 + 1)$.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.
6. Дослідити на неперервність функцію $y = \frac{1 + x^3}{1 + x}$.

Варіант 5

1. Дайте визначення неперервної функції в точці та на відрізку. Сформулюйте властивості функцій, неперервних на відрізку.
2. Як обчислити похідну другого порядку функції, заданої параметрично?

$$\frac{\ln x}{x}$$

3. Побудувати графік функції $y = \frac{\ln x}{x}$.
4. Показати, що функція $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ задовольняє диференціальному рівнянню $y'' - 4y' + 29y = 0$.

$$5. \text{ Знайти } \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$6. \text{ Знайти } \frac{dy}{dx} \text{ від функції } y, \text{ заданої неявно: } \operatorname{arctg}(x+y) = x.$$

Варіант 6

1. Дайте визначення границі функції в точці. Сформулюйте властивості функції, які мають границю.
2. Як розкрити невизначеності вигляду 0^0 , ∞^0 , 1^∞ ?

$$3. \text{ Знайти } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ якщо } x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}.$$

$$4. \text{ Застосовую формулу Лейбніца, знайти } y^{(n)}, \text{ якщо } y = x^3 \cdot \ln x.$$

$$5. \text{ Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції } y = (1+x^2)e^x.$$

$$6. \text{ Дослідити функцію на неперервність } y = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}.$$

Варіант 7

1. Дайте визначення асимптот графіка функції. Запишіть рівняння асимптот.
2. Сформулюйте теорему Роля.

$$3. \text{ Побудувати графік функції } y = x^2 + \frac{2}{x}.$$

$$4. \text{ Обчислити } y'', \text{ якщо } y = \ln \cos \frac{x-1}{x}.$$

$$5. \text{ Знайти } \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctgx}$$

$$6. \text{ Знайти найменше та найбільше значення функції } y = x + 2\sqrt{x} \text{ на відрізку } [0, 4].$$

Варіант 8

1. Сформулюйте достатні умови опуклості та вгнутості графіка функції на відрізку.
2. Чому дорівнює диференціал функції та який його геометричний зміст?
3. Знайти y'' в точці $(1, 0)$, якщо $x^4 - xy + y^4 = 1$.
4. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в полуколо радіуса R.

$$5. \text{ Знайти } \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

$$6. \text{ Знайти асимптоти графіка функції } y = e^{-x^2} + 2$$

Варіант 9

1. Дайте визначення точки розрива функції. Як вони класифікуються?
2. Запишіть другу замечательну границю.

3. Обчислити y'' , якщо $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$.
4. Побудувати графік функції $y = (x-1)^2 (x+2)$.
5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$.
6. Знайти диференціал dy функції $y = \operatorname{arctg} e^x$.

Варіант 10

1. Дайте визначення похідної функції в точці. Який її геометричний та механічний зміст? Чому дорівнює похідна добутку, частки, складної функції?
2. Сформулюйте теорему Лагранжа о скінченних приростах функції.
3. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = x^4 (12 \ln x - 7)$.

Практичне заняття № 8

Тема: «ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ, НАЙПРОСТІШІ СПОСОБИ ІНТЕГРУВАННЯ. МЕТОД ПІДВЕДЕННЯ ПІД ЗНАК ДИФЕРЕНЦІАЛА»

Питання для контролю

1. Дайте визначення первісної для функції $f(x)$.
2. Сформулюйте теорему о різниці двох первісних.
3. Дайте визначення невизначеного інтеграла.
4. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
5. Запишіть таблицю основних невизначених інтегралів.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Знайти інтеграли, використовуючи таблицю основних інтегралів:

Задача 1. $\int \sqrt[3]{mx} dx$.

Відповідь. $\frac{2}{3} \sqrt[3]{mx^3} + C$.

Задача 2. $\int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx$

Відповідь. $2\sqrt{ax} + 2x + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{x^3}{a}} + C$.

Задача 3. $\int 2^x e^x dx$

Відповідь. $\frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$.

Задача 4. $\int \frac{ax}{x^2 + 4} dx$

Відповідь. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$.

Задача 5. $\int \frac{ax}{\sqrt{3-x^2}} dx$.

Відповідь. $\arccos \frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

Задача 6. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$.

Відповідь. $\ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C$.

Задача 7. $\int (x+1)^2 dx$.

Відповідь. $\frac{(x+1)^3}{3} + C$.

Задача 8. $\int (x+1)^{20} dx$.	Відповідь. $\frac{(x+1)^{21}}{21} + C$.
Задача 9. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.	Відповідь. $-\frac{1}{8(2x-3)^4} + C$.
Задача 10. $\int x\sqrt{x^2-1} dx$.	Відповідь. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C$.
Задача 11. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx$.	Відповідь. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+1} + C$.
Задача 12. $\int sh 3x dx$.	Відповідь. $\frac{1}{3}ch 3x + C$.
Задача 13. $\int \sin(2x-3) dx$.	Відповідь. $-\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$.
Задача 14. $\int \frac{dx}{2x-1}$.	Відповідь. $\frac{1}{2}\ln 2x-1 + C$.
Задача 15. $\int \frac{dx}{4x^2-3}$.	Відповідь. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left \frac{2x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{3}}\right + C$.
Задача 16. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$.	Відповідь. $\frac{1}{3}\arctg x^3 + C$.
Задача 17. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x} dx$.	Відповідь. $-\frac{1}{3}\ln 3+\cos 3x + C$.
Задача 18. $\int \frac{\sqrt{\tg x}}{\cos^2 x} dx$.	Відповідь. $\frac{2}{3}\sqrt{\tg^3 x} + C$.
Задача 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{cth x} sh^2 x}$.	Відповідь. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{cth^2 x} + C$.
Задача 20. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$.	Відповідь. $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$.

Практичне заняття № 9

Тема: «МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ ПІДСТАНОВКОЮ ТА ЧАСТИНАМИ»

Питання для контролю

1. Запишіть формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі.
2. Яку можна зробити підстановку в інтегралах:
 - а) $\int (2x+3) dx$.
 - б) $\int (x-1)\sqrt{x+1} dx$.
3. Запишіть формулу інтегрування частинами.
4. Запишіть основні вигляди функцій, інтегрованих частинами.
5. Наведіть приклади функцій, інтегрованих частинами двічі.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Знайти інтеграли, застосувавши потрібну підстановку:

Задача 1. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

Відповідь. $2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$.

Задача 2. $\int \frac{x}{(3-x)^7} dx$

Відповідь. $\frac{1}{2(3-x)^6} - \frac{1}{5(3-x)^5} + C$

Задача 3. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 - \cos^2 x}} dx$

Відповідь. $2\sqrt{3 - \cos^2 x} + C$.

Задача 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - e^x}}$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{\sqrt{3 + e^x} - \sqrt{3}}{\sqrt{3 + e^x} + \sqrt{3}} + C$

Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

Задача 5. $\int x \cdot \cos x dx$

Відповідь. $x \cdot \sin x + \cos x + C$.

Задача 6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

Відповідь. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^2} + C$

Задача 7. $\int x \cdot \arctg x dx$

Відповідь. $\frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1) \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \cdot x + C$.

Задача 8. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

Відповідь. $x \cdot \tg x + \ln |\cos x| + C$.

Задача 9. $\int x^2 e^{-x} dx$

Відповідь. $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$.

Задача 10. $\int e^{ax} \cdot \cos bx dx$

Відповідь. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \cdot \sin bx + a \cdot \cos bx) + C$

Практичне заняття № 10

Тема: «Інтегрування раціональних функцій»

Питання для контролю

1. Дайте визначення раціональної функції (цілої та дробної).
2. Який раціональний дріб називається правильним? Неправильним?
3. Сформулюйте теорему о розкладанні правильної раціональної дробі на простіші.
4. Запишіть простіші раціональні дробі I, II, III та IV типів.
5. Як розкладається правильний раціональний дріб у випадках:
 - a) знаменник має тільки дійсні різні корені;
 - b) знаменник має тільки дійсні корені, деякі з них кратні;
 - c) знаменник має комплексні різні корені;
 - d) знаменник має комплексні кратні корені.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$

Відповідь. $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C$

Задача 2. $\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$

Відповідь. $-\frac{1}{6} \ln |x| - \frac{7}{2} \ln |x-2| + \frac{17}{3} \ln |x-3| + C$

Задача 3. $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$

Відповідь. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + C$

$$\begin{array}{ll} \text{Задача 4. } \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx & \text{Відповідь. } -\frac{4}{3(x-1)} - \frac{20}{9} \ln|x-1| + \frac{7}{9} \ln|x+2| + C \\ \text{Задача 5. } \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} & \text{Відповідь. } \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C \end{array}$$

Практичне заняття № 11

Тема: «ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ТА ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ»

Питання для контролю

1. Як інтегруються функції вигляду $\sin^m x \cdot \cos^n x$ у випадку, якщо хоча б одно з чисел m або n непарне додатне?
2. Як інтегруються функції вигляду $\sin^m x \cdot \cos^n x$ у випадку, якщо m та n парні невід'ємні числа?
3. Як інтегруються функції вигляду $\sin^m x \cdot \cos^n x$ у випадку, якщо $m+n=2k$, $k \in \mathbb{N}$? Які тригонометричні формули слід застосовувати для знаходження інтегралів $\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$?
4. Для інтегрування яких функцій застосовується універсальна підстановка? Запишіть її.
5. Для інтегрування яких функцій використовується підстановка $x = \operatorname{tg} x$?

Задачі для розв'язання в аудиторії

$$\begin{array}{ll} \text{Задача 1. } \int \sin^3 x dx. & \text{Відповідь. } -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \\ \text{Задача 2. } \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx. & \text{Відповідь. } \frac{x}{16} - \frac{\sin^4 x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C = \\ & \frac{x}{16} - \frac{\sin^3 x \cdot \cos^3 x}{6} - \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{8} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{16} + C \\ \text{Задача 3. } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx & \text{Відповідь. } \frac{1}{3} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \\ \text{Задача 4. } \int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \sin^3 \frac{x}{3}} & \text{Відповідь. } 3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{3} \right| - \frac{3}{2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{3}} + C \\ \text{Задача 5. } \int \sin 3x \cdot \cos 5x dx. & \text{Відповідь. } -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \\ \text{Задача 6. } \int \operatorname{tg}^3 x dx. & \text{Відповідь. } -\operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C. \end{array}$$

Практичне заняття № 12

Тема: "ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ"

Питання для контролю

$$R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right).$$

1. Вкажіть підстановку для інтегрування функції вигляду
2. Вкажіть підстановку для інтегрування функції вигляду

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots\right).$$

3. Вкажіть підстановки для інтегрування функції вигляду $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$.
4. Дайте визначення диференціального бінома. Перерахуйте випадки інтегровності диференціального бінома. Назвіть відповідні підстановки.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ Відповідь. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$.

Задача 2. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$ Відповідь. $\arctg \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C$.

Задача 3. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}$ Відповідь. $\frac{3}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C$.

Задача 4. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$ Відповідь. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x + \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}} \right| + C$.

Задача 5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$ Відповідь. $\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Знайти інтеграли від диференціальних біномів.

Задача 6. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx$ Відповідь. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{24}{11}x^{11/6} + \frac{36}{13}x^{13/6} + \frac{8}{5}x^{5/2} + \frac{6}{17}x^{11/6} + C$.

Задача 7. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx$ Відповідь. $\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{1-x^4} + 1}{x^2} - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C$.

Задача 8. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$ Відповідь.

$$-\frac{1}{10} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5} + \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} + C$$

Практичне заняття № 13

Контрольна робота по темі: «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Знайти інтеграли:

Варіант 1.

1. $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx$
2. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$
3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1}$
4. $\int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$
5. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$
6. $\int x \ln(x-1) dx$

Варіант 2.

1. $\int x \cdot \arcsin x dx$
2. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$
3. $\int \frac{x-1}{x\sqrt{2x-1}} dx$
4. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$
5. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
6. $\int x\sqrt{a+x^2} dx$

Варіант 3.

1. $\int \sin^5 x dx$
2. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$
3. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}+1}$
4. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$
5. $\int \frac{\sqrt{thx}}{ch^2 x} dx$
6. $\int x e^{2x} dx$

Варіант 4.

1. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$
2. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$
3. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$
4. $\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx$
5. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$
6. $\int \arctg x dx$

Варіант 5.

1. $\int \sin x \sin 3x dx$
2. $\int (x+1)\sqrt{x+1} dx$
3. $\int \sqrt{\frac{x}{2-x}} dx$
4. $\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3} dx$
5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$
6. $\int \frac{x dx}{ch^2 x}$

Варіант 6.

1. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2} dx$
2. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$
3. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$
4. $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx$
5. $\int \cos^4 x dx$
6. $\int \ln(x^2+1) dx$

Практичне заняття № 14

Тема: «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА МЕТОДИ ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ»

Питання для контролю

1. Дайте визначення інтегральної суми. Дайте визначення $\int f(x)dx$.
2. Сформулюйте теорему існування визначного інтеграла.
3. Який геометричний зміст визначного інтеграла?
4. Сформулюйте основні властивості визначного інтеграла.
5. Сформулюйте теорему об оцінці визначного інтеграла.
6. Сформулюйте теорему о середньому для визначного інтеграла.
7. Сформулюйте теорему о похідній визначного інтеграла по змінній верхній границі.
8. Запишіть формулу Ньютона-Лейбниці.
9. Запишіть формулу заміни змінної в визначному інтегралі.
10. Запишіть формулу інтегрування частинами для визначного інтеграла.

Задачі для розв'язання в аудиторії

Задача 1. Обчислити $\int_0^5 (1+x)dx$, розглядаючи його як границю відповідної інтегральної суми.

Відповідь. $\frac{35}{2}$

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбниці, обчислити інтеграли:

Задача 2. $\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)dx$.

Відповідь. 5.

Задача 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi d\varphi$.

Відповідь. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$.

Визначити знаки інтегралів, не обчислюючи їх.

Задача 4. $\int_{-2}^1 \sqrt[3]{x} dx$

Відповідь. Мінус. Розбити проміжок $[-2, 1]$ на два проміжки $[-2, -1]$ та $[-1, 1]$

Задача 5. $\int_{\frac{1}{3}}^1 x \ln x dx$.

Відповідь. Мінус.

Не обчислюючи інтегралів, з'ясувати, який з інтегралів більше.

Задача 6. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ або $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

Відповідь. Другий.

Задача 7. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ або $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$

Відповідь. Перший.

Оцінити інтеграл.

Задача 8. $\int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3} dx$.

Відповідь. $2\sqrt{7} < I < 6$.

Обчислити інтеграли за допомогою відповідної підстановки.

Задача 9. $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

Відповідь. $\frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5} \right)$

Задача 10. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

Відповідь. $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$

Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами.

Задача 11. $\int_0^1 x e^x dx$

Відповідь. 1.

Задача 12. $\int_1^e \ln^2 x dx$.

Відповідь. $e - 2$.

Практичне заняття № 15

Тема: «НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ»

Питання для контролю

1. Дайте визначення невластного інтеграла з нескінченними межами.
2. Дайте визначення збіжного невластного інтеграла.
3. Дайте визначення абсолютно збіжного невластного інтеграла.
4. Сформулюйте ознаки збіжності та розбіжності невластних інтегралів з нескінченними межами.
5. Дайте визначення невластного інтеграла від необмеженої функції.
6. Сформулюйте ознаки збіжності та розбіжності невластних інтегралів від необмежених функцій.

7. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^k}$, $a \neq 0$.

8. Дослідити збіжність інтеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, $a < b$.

Задачі для розв'язання в аудиторії

1. Інтеграли з нескінченними межами.
Обчислити невластні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

Задача 1. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$

Відповідь. $\frac{1}{2} = \Theta$.

Задача 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$

Відповідь. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Задача 3. $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}$

Відповідь. Розбігається.

Дослідити на збіжність невластні інтеграли.

Задача 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2 + 3 + 5x^4}$

Відповідь. Збігається.

Задача 5. $\int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx$

Відповідь. Розбігається.

2. Інтеграли від необмежених функцій.

Обчислити невластні інтеграли (або встановити їх розбіжність).

Задача 6. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}$

Відповідь. Розбігається.

Задача 7. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{5x - x^2 - 8}}$

Відповідь. π .

Дослідити на збіжність невластні інтеграли.

Задача 8. $\int_0^1 \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Відповідь. Збігається.

Задача 9. $\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$

Відповідь. Розбігається.

Література

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985.
2. Рудавський Ю.К. та ін. Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1 Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. - Ч. I. - 352 с.
3. Вища математика : підручник для природничих спец. ун-тів і втузів : у 2 кн. / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, І. В. Васильченко [та інш.]; за ред. Г. Л. Кулініча .- К. : Либідь, 1995-1996 Кн. 1: Основні розділи.- К., 1995.- 372 с.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : У 2 кн.: Навч. посібник. .- 2-е вид., зі змінами.- К. : Либідь, 1994 Кн. 2: Вища математика / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов, Є. Ю. Таран; за ред. І. П. Васильченка.- К., 1994.- 280 с.
5. Кривуца В.Г. Вища математика: Практикум : Навч. посібник для вузів / В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська .- К. : ЦУЛ, 2003.- 536 с.
6. Овчинников П.П., Вища математика: У 2 ч. : Підручник для втузів / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.П. Михайленко .- 2-ге вид., стереотип.- К. : Техніка, 2000 Ч. 1: .- К., 2000.- 592 с.
7. Соколенко О.І. Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник для природничих спец. вищих навч. закладів / Новик Г.А .- К. : Либідь, 2001.- 248 с.
8. Пак В.В. Вища математика : підруч. для втузів / Ю.Л. Носенко .- К. : Либідь, 1996.- 440 с.
9. Методичні вказівки до практичних занять з розділу "Диференціальне числення функції однієї змінної" для студентів ІКС, що навчаються з базової підготовки за напрямком 6.050102 "комп'ютерна інженерія" / Укл.: М.І. Шпинковська, О.А. Шпинковський, , Л. І. Малигіна - Одеса: ОНПУ, 2010. - 25 с.