

Районная олимпиада 2005 год.

9 класс

1. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки K и L, а на стороне AC - точки M и N так, что отрезок KL параллелен AC, AK=KM, NL=LC. Докажите, что прямая AC перпендикулярна BP, где P- точка пересечения прямых KM и LN.
2. Витя, Толя и Сергей играли в снежки. Первый снежок бросил Толя. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Витя бросал 6 снежков, Сергей - 5, а Толя - 4 снежка. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, сколько в кого снежков попало, если мимо цели пролетело 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются).
3. Найдите целые решения $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} = 11$
4. Найти отношения длин диагоналей ромба, если известно, что одна из его диагоналей делится вписанной в ромб окружностью на три равные части.
5. Докажите, что если числа p и p^2+2 простые, то число p^3+4 также простое.

Указания к решению задач.
9 класс

1. *Решение:*

$\angle BKL = \angle KAM = \angle KMA = \angle MKL$. Аналогично $\angle BLK = \angle PLK$.

$\triangle KBL = \triangle KPL$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Тогда $KP = KB$ и $\triangle BKP$ - равнобедренный. Его биссектриса совпадает с высотой, т.е. $KL \perp BP$ и, тогда $AC \perp BP$. (Точка пересечения прямых KM и LN может располагаться внутри треугольника, но доказательство от этого не зависит)

2. *Ответ: в каждого – по одному.*

Пусть в Витю попало a снежков, в Сергея- b , в Толю- c .

Тогда все вместе они кинули $6a+5b+4c+1$ снежков, что должно совпасть с $a+b+c+13$, откуда $5a+4b+3c=12$. Это уравнение имеет в целых неотрицательных числах три решения $(1;1;1)$, $(0;0;4)$ и $(0;3;0)$, из которых условию задачи удовлетворяет только $a = b = c = 1$.

3. Так как для любого целого x числа x^2 и x либо оба четны либо оба нечетны, то сумма x^2+x всегда является четной. Поэтому x^2+x+1 всегда представляет собой нечетное число. Следовательно, $\sqrt{x^2+x+1}$ - также нечетное число. Аналогично показывается, что $\sqrt{y^2-y+1}$ - нечетное число. Но сумма двух нечетных чисел не может быть равна 11. Поэтому не существует целых чисел x и y , удовлетворяющих исходному уравнению.

4. *Ответ: $2\sqrt{2}$.*

Решение: Пусть $r = OT$ - радиус вписанной в ромб окружности: из условия легко находим, что $AO=3r$. Из прямоугольного треугольника ATO по

теореме Пифагора находим $AT = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$. Далее, так как во всяком прямоугольном треугольнике произведение гипотенузы на проекцию катета равно квадрату этого катета, то из прямоугольного треугольника AOB получаем $AB \cdot AT = AO^2$, откуда

$$AB = \frac{AO^2}{AT} = \frac{9r^2}{2\sqrt{2}r} = \frac{9r}{2\sqrt{2}}.$$

Теперь из $\triangle AOB$ имеем

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{81}{8}r^2 - 9r^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}r.$$

Таким образом, искомое

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BO} = \frac{3r \cdot 2\sqrt{2}}{3r} = 2\sqrt{2}.$$

отношение равно

5. Пусть число p при делении на 3 дает в остатке 1, т.е. $p = 3k+1$, $k \in N$, тогда $p^2+2 = (3k+1)^2+2 = 3(3k^2+2k+1)$ не является простым числом. Если же $p = 3k+2$, $k \in N$, то $p^2+2 = 3(3k^2+4k+2)$ также не является простым числом. Следовательно, $p = 3$, $p^2+2 = 11$ и тогда $p^3+4 = 31$ простое число.