

Le contenu du corrigé comporte des compléments . Les candidats évidemment doivent répondre plus succinctement et de façon plus ciblée.

1. Electrostatique

1 Champ électrique

□ 1.1

La loi de Coulomb concerne deux charges ponctuelles placées dans le vide.

La charge q_1 est placée en O, origine d'un repère fixe ; la charge q_2 , placée en M, est soumise, d'après la loi de Coulomb

$$\text{à la force } \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Par définition le champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M par la charge q_1 est telle que $\vec{F}_{12} = q_2 \cdot \vec{E}(M)$

Ce champ ne dépend pas de la charge q_2 .

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Le champ créé par q_1 caractérise l'influence de celle-ci sur l'espace qui l'entoure.

Remarque : Dans un milieu isolant homogène, isotrope et linéaire la force d'interaction est donnée en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$. La constante ϵ s'appelle permittivité du milieu et ϵ_r permittivité relative du milieu.

Pour l'air $\epsilon_r \approx 1,00058$, de sorte que l'électrostatique dans l'air se confond pratiquement avec l'électrostatique du vide.

□ 1.2

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets linéaires ce qui constitue le principe de superposition.

La force subie par une charge q placée en M et créée par un ensemble de charges q_i placées en P_i est la somme vectorielle des n forces qu'exerce individuellement chaque charge

Le champ $\vec{E}(M)$ est donc la somme des champs créés par les n charges :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{(P_i M)^3}$$

□ 1.3

Distribution volumique : Un volume élémentaire $d\tau$ contient une charge : $dq(P) = \rho(P) d\tau$

Le champ $\vec{E}(M)$ créé par un volume V est :

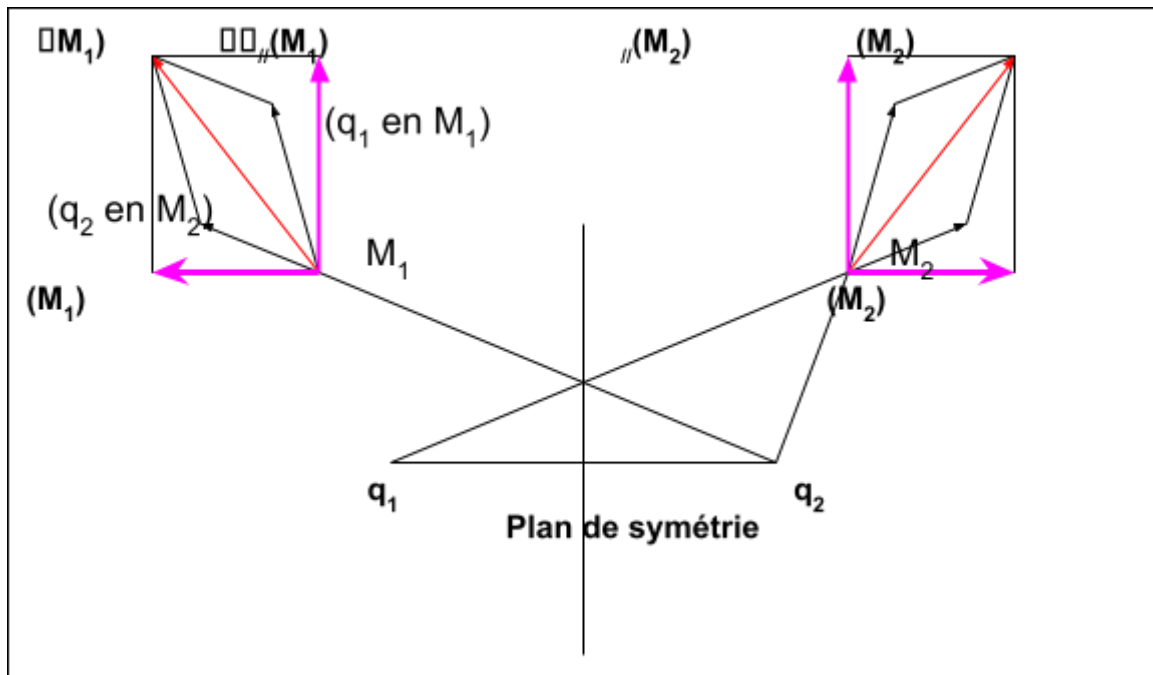
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

Distribution surfacique : $dq(P) = \sigma(P) dS$; $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \sigma(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} dS(P)$

Distribution linéique : $dq(P) = \lambda(P) d\ell$; $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \lambda(P) \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d\ell(P)$

Ces expressions ne sont a priori applicables qu'aux cas des distributions d'extension finie pour assurer la convergence de l'intégrale du point de vue de la contribution des points éloignés. Cependant , il existe des cas de distributions d'extension infinie pour lesquels ces intégrales convergent.

1.4



Le problème est invariant par rotation autour de l'axe des charges q_1 et q_2 . Il suffit donc de se placer dans un plan contenant ces charges.

Par addition vectorielle, on montre que les champs $\vec{E}(M_1)$ et $\vec{E}(M_2)$ sont symétriques par rapport au plan de symétrie des charges. Donc :

$$\vec{E}_{\perp}(M_1) = -\vec{E}_{\perp}(M_2) \quad ; \quad \vec{E}_{\parallel}(M_1) = \vec{E}_{\parallel}(M_2)$$

Sur le plan de symétrie, le champ ne peut pas avoir deux directions donc le champ est contenu dans le plan et $\vec{E}_{\perp}(M \in \text{Plan de symétrie}) = \vec{0}$.

On peut généraliser à deux distributions volumiques symétriques

La distribution de charges est invariante par une symétrie par rapport au plan miroir.

Si P et P' sont symétriques par rapport à ce plan :  $\rho(P) = \rho(P')$

Aux points M et M' symétriques par rapport à un plan miroir d'une distribution de charges, les champs électriques $\vec{E}$ (M) et $\vec{E}'$ (M') sont symétriques l'un de l'autre.

Sur le plan miroir, le champ électrostatique est parallèle au plan miroir.

2. Potentiel et énergie potentielle.

□ 2.1

Le travail de la force électrique dans un déplacement élémentaire (M) est :

$$\delta W = \vec{F}(q_2) \cdot d\vec{r}$$

or $d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$ en coordonnées sphériques

$$\delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(r)^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(r)^2} dr$$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) ; \quad W(\infty, r) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r} \right)$$

□ 2.2

Par définition $dU = - \delta W$; $U(r_2) - U(r_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$.

Remarquons que :

$$\delta W(\vec{F}) = - \delta W(\text{opérateur}) \quad \text{dans une transformation réversible où à chaque instant } \vec{F}_{\text{elec}} + \vec{F}_{\text{op}} = \vec{0}$$

$$U(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{en prenant } U(\infty) = 0 \text{ par convention s'il n'y a pas de charge à l'infini.}$$

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left(\frac{1}{r} \right)$$

□ 2.3

$$dU = q_1 dV = - \vec{F} \cdot d\vec{r} = - q_1 \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{donc } dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{or } dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{donc } \vec{E} = - \nabla V$$

On peut faire une démonstration :

$$dV = V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$= dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z ; \quad dV = - \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{donc } \vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \dots\dots\dots$$

$$\mathbf{d' où } \vec{E} = - \nabla V$$

□ 2.4

$$\vec{E}(M) = \sum \vec{E}_i(M) = - \sum \nabla V_i = - \nabla V ; \quad V(M) = \sum V_i(M)$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(P_i)}{P_i M} ; \quad V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

Cette dernière expression n'est valable que sur un domaine d'extension finie car elle repose sur la convention que le potentiel tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne à l'infini. Le volume $\mathcal{V}$ est limité dans l'espace.

□ 2.5

L'énergie potentielle des trois charges est le travail fourni par un opérateur pour amener les trois charges de l'infini (sans interaction) dans leur position finale.

Pour amener la charge q_0 , de l'infini, le travail fourni par l'opérateur est nul.

On amène une charge q_1 : le travail fourni est alors égal à :

$$W_1(\text{opé}) = q_1 V(\text{en } H_1 \text{ par } q_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{OH}$$

On amène ensuite la seconde charge q_1 :

$$W(\text{opérateur}) = q_1 V(\text{en } H_2 \text{ créé par } q_0) + q_1 V(\text{en } H_2 \text{ créé par } q_1)$$

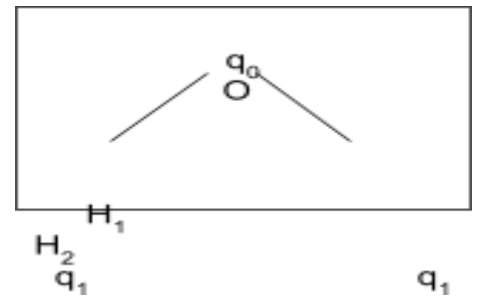
$$W_2(\text{opé}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{OH} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{H_1 H_2}$$

$$\text{Donc } U = W_1 + W_2 = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{OH} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{H_1 H_2}$$

On retrouve le résultat connu : $U = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$ avec V_i potentiel créé en P_i où est placée la charge q_i par toutes les autres charges.

Application numérique : $OH = 0,1 \text{ nm}$; $H_1 H_2 = 2 \cdot OH \cos 52^\circ$

$U = -8,51 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ou $-5,3 \text{ eV}$ soit $-512 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.



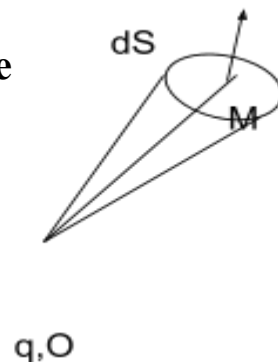
3. Flux du vecteur champ à travers une surface

□ 3.1

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{OM^2} \frac{OM \cdot n \cdot dS}{OM^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

$d\Omega$ est l'angle solide élémentaire, compté algébriquement, sous lequel de O on voit la surface dS orientée.



$$\iint_S d\Omega = 4\pi$$

Si la charge appartient au volume délimité par la surface fermée :

$$\iint_S d\Omega = 0$$

Si la charge est extérieure au volume délimitée par la surface :

Remarque : Une démonstration détaillée de cette relation est réalisée dans l'ouvrage G.Bruhat Electricité Page 48.
(Edition Masson)

□ 3.2

On peut généraliser à n charges .

Considérons une surface fermée convenablement choisie et prise dans une distribution de charge q_i .

Cette surface partage l'espace en deux régions : l'intérieur et l'extérieur .

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{intérieur}} \frac{q_i \vec{P_i M}}{P_i M^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{extérieur}} \frac{q_j \vec{P_j M}}{P_j M^3}$$

$$\Phi(\vec{E} \text{ sur } S) = \sum \Phi_i + \sum \Phi_j = \sum \Phi_i = \sum_i \frac{q(\text{intérieure})}{\epsilon_0}$$

On généralise facilement à une distribution de charges quelconques placées dans le vide :

Le flux sortant du champ d'une distribution $\mathcal{V}$ de charges électriques à travers une surface fermée est égal à la charge située à l'intérieur de S divisée par ϵ_0 .

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} ; \text{ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur du volume délimité par la surface } S .$$

4.Applications

□ 4.1

Le volume de la sphère (la boule) est à répartition de charge à symétrie sphérique de centre O : le champ est de la

forme : $\vec{E}(\mathbf{M}) = E(r) \vec{e}_r$.

On peut aussi invoquer les symétries : Tous les plans diamétraux passant par M sont plans de symétrie ; OM est leur

intersection ; $\vec{E}(\mathbf{M})$ est porté par $\vec{OM}$.

$$r < R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4/3 \pi \rho r^3 / \epsilon_0 \quad E(r) = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0}$$

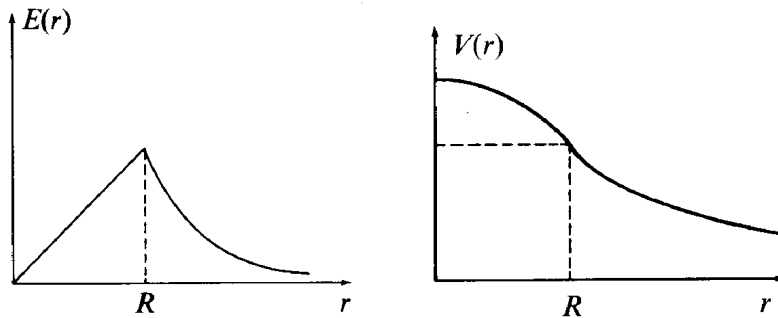
$$r > R \quad E(r) \cdot 4\pi r^2 = 4/3 \pi \rho R^3 / \epsilon_0 \quad E(r) = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

□ **4.2**

En coordonnées sphériques ; $E = - \frac{\partial V}{\partial r}$ Par convention $V(\infty) = 0$; pour $r = R$, le potentiel est continu .
Le potentiel est continu à la traversée d'une distribution surfacique de charges finies.

$$r > R : V(M) - V(\infty) = V(M) = - \int_{\infty}^r E \cdot dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$r < R : V(M) - V(R) = \frac{\rho}{6\epsilon_0} (R^2 - r^2) \quad V(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$



Graphes $E(r)$: pour $r = R$; $E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$: pente $\frac{\rho R}{3\epsilon_0}$ à gauche et $-\frac{2\rho R}{3\epsilon_0}$ à droite .

Graphes $V(r)$: La courbe $V(r)$ a un point d'inflexion pour $r = R$, $V(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$

4.3 Energie potentielle

On construit la sphère par couches successives .

Soit une sphère de rayon r chargée en volume avec une densité ρ uniforme : $V(r' > r) = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$

De l'infini, apportons sur cette sphère une couche d'épaisseur dr et de charge $dq = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$.

L'opérateur fournit un travail $\delta W = V(r) \cdot dq$

Pour constituer la sphère de rayon R , l'opérateur fournit le travail :

$$W_{(op)} = U = \int_0^R \frac{\rho^2 4\pi r^4}{3\epsilon_0} \cdot dr = \frac{\rho^2 4\pi R^5}{15\epsilon_0} = \frac{3Q^2}{5\epsilon_0 R}$$

Le calcul de cette énergie peut être conduit différemment mais pas dans le cadre de l'énoncé.

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \rho V(r) \cdot dr \quad \text{ou} \quad U = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

4.4 .Sphère creuse

On applique le principe de superposition .

On considère deux sphères chargées $+\rho$ (centre O ; rayon R) et $-\rho$ (centre O' ; rayon R') :

$$\vec{E}_{(M)} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O'M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}$$

Le champ à l'intérieur de la cavité est uniforme .

5. Le dipôle électrique

□ 5.1

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

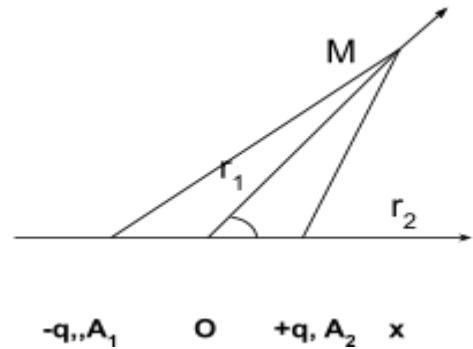
$$r_1^2 = r^2 + a^2 + 2a.r \cos \theta \quad ; \quad r_2^2 = r^2 + a^2 - 2a.r \cos \theta$$

Au premier ordre :

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2}$$

On pose $\vec{p} = 2aq \vec{e}_x$; $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$



□ 5.2

$$\vec{E} = - \nabla V \quad ; \quad E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} \quad ; \quad E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad ; \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

On peut écrire aussi pour un dipôle placé en P : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{PM})\vec{PM}}{PM^5} - \frac{\vec{p}}{PM^3} \right]$

□ 5.3

Les équipotentiels sont données par : $p \cos \theta / r^2 = \text{cte}$ soit $r^2 = r_0^2 \cdot \cos \theta$

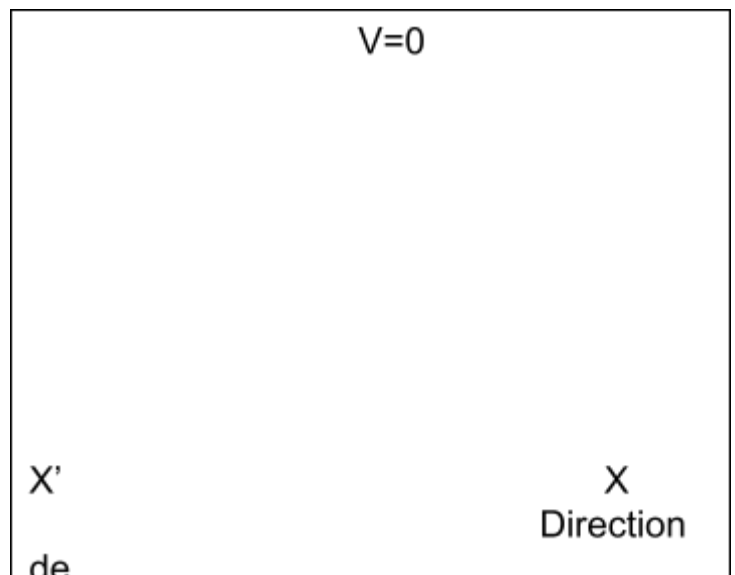
L'équipotentielle $V = 0$ est le plan médiateur de $A_1 A_2$.

Les lignes de champ sont définies par $\vec{E}$

parallèle à .

Compte tenu de la symétrie , on se place en coordonnées polaires .

$$= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \quad \vec{E} \wedge = \vec{0}$$



$$dr / E_r = r d\theta / E_\theta \quad \text{soit } dr/r = 2 \cotan \theta d\theta$$

$$\ln r = \ln \sin^2 \theta + \text{cte} \quad \text{soit} \quad r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Remarquons que les lignes de champ semblent revenir sur elle-mêmes au voisinage de O : une ligne de champ ne peut être fermée sur elle-même. Mais il faut souligner qu'au voisinage de O, les calculs ne sont plus valables car a/r n'est plus un infiniment petit.

6. Molécule polaire .

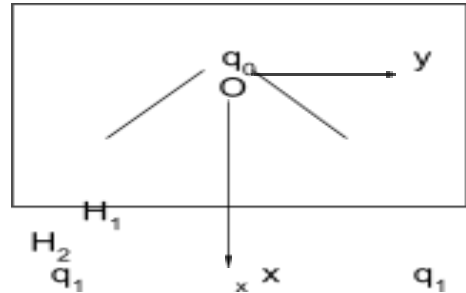
□ 6.1

Soit O' un autre point origine

$$\sum_i q_i OM = \sum_i q_i (OO' + O'M) \quad \text{or} \quad \sum_i q_i = 0$$

$$\text{donc} \quad \sum_i q_i O'M$$

Le moment dipolaire ne dépend donc pas de l'origine O choisie pour le définir.



$$\vec{p} = 4qa \cos \alpha/2 \vec{e}_x \quad ; \quad p = 6,23 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$$

□ 6.2.1

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}(\vec{r}) + q_1(H_1) \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_1) + q_1(H_2) \vec{E}(\vec{r} + \vec{r}_2)$$

□ 6.2.2.

On se propose de redémontrer que $\vec{F} = (\sum_i q_i) \vec{E}(O)$

$$F_x = q_0 E_x(x, y, z) + q_1 E_x(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) + q_1 E_x(x + \Delta x_2, y + \Delta y_2, z + \Delta z_2)$$

$$\text{Or : } E_x(x + \Delta x_1, y + \Delta y_1, z + \Delta z_1) \approx E_x(x, y, z) + \Delta x_1 \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y_1 \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z_1 \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Avec $q_0 E_x(x, y, z) + 2 q_1 E_x(x, y, z) = 0$ il vient :

$$F_x = (q_1 \Delta x_1 + q_1 \Delta x_2) \frac{\partial E_x}{\partial x} + (q_1 \Delta y_1 + q_1 \Delta y_2) \frac{\partial E_x}{\partial y} + (q_1 \Delta z_1 + q_1 \Delta z_2) \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$\text{Or } \vec{p} = q_1 (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \quad ; \quad p_x = (q_1 \Delta x_1 + q_1 \Delta x_2) \quad ; \quad p_y = (q_1 \Delta y_1 + q_1 \Delta y_2) \quad ; \quad p_z = (q_1 \Delta z_1 + q_1 \Delta z_2)$$

$$\text{Donc } F_x = (\vec{p} \cdot \vec{e}_x) E_x$$

□ 6.2.3

Il en est de même pour les deux autres composantes :

$$F_y = (\vec{p} \cdot \vec{e}_y) E_y \quad ; \quad F_z = (\vec{p} \cdot \vec{e}_z) E_z$$

Donc $\vec{F} = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial y}, \frac{\partial E}{\partial z} \right)$ $\mathbf{F}_x = \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial E}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial E}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial E}{\partial z}$

$\vec{E} = \vec{0}$ donc $\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial x}$

$\mathbf{F}_x = \mathbf{p}_x \cdot \frac{\partial E}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial E}{\partial x} + \mathbf{p}_z \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial (p \cdot E)}{\partial x}$ car $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y$ et $\mathbf{p}_z$ sont indépendants de x, y, z .

$\vec{F} = \left(p \cdot E \right)$

L'énergie potentielle du dipôle est donc d'après : $\vec{F} = - \nabla U$; $U = - p \cdot E$

Remarquons aussi que le dipôle est soumis à un moment : $M_M = p \wedge E(M)$

Le dipôle soumis à cette seule action mécanique ($\vec{F}$, $M_M = p \wedge E(M)$) s'oriente dans le champ électrique

de façon que $\vec{p}$ soit parallèle à $\vec{E}$ et se déplace dans le sens et la direction définies par le gradient de U.

En un point M : $\theta = (\vec{p}, \vec{E})$, $U = -p \cdot E \cos \theta$

$\theta = 0$ équilibre stable ; minimum de l'énergie potentielle $U = -p \cdot E$

$\theta = \pi$ équilibre instable : $U = p \cdot E$

6.3 Interaction

6.3.1

$U = - \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$

6.3.2

Pour θ_1 fixé : $\frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0$ $\tan \theta_2 = \frac{1}{2} \tan \theta_1$ $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0$ $\tan \theta_1 = \frac{1}{2} \tan \theta_2$

$\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 0$

$\theta_1 = \pi/4$; $\theta_2 = 0,46 \text{ rad} = 26,6^\circ$

$\theta_1 = \pi/2$; $\theta_2 = 90^\circ$

6.3.3 Cette énergie est minimale pour $\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = -3K \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0$

$\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ $U = -p^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^3)$ ou $\theta_2 = 0$ et $\theta_1 = 0$ $U = -2p^2 / (4 \pi \epsilon_0 r^3)$

Donc le minimum est pour $\theta_{2e} = 0$ et $\theta_1 = 0$.

$$\vec{F} \text{ (exercée sur } q_2 \text{ par } q_1) = - \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = - \frac{6p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \vec{e}_r ; \vec{e}_r \text{ direction de } \overrightarrow{O_1 O_2}$$

□ 6.3.4

$$p = 6,23 \cdot 10^{-30} \text{ Cm} ; U = -2,59 \cdot 10^{-20} \text{ J} = -0,161 \text{ eV} = 115,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Bibliographie : H prépas Electromagnétisme première année MPSI-PCSI (Hachette)

Electromagnétisme Pérez (Masson)

Electromagnétisme première année Gié/Sarmant (Tec-Doc Lavoisier)

Electricité Bruhat (Masson)