concours ECRIN 1996 (série P, physique II, durée : 2 heures)

LES TROIS BARRIERES PROTECTRICES

A) LA COUCHE D'OZONE :

A.1) La force $\vec{f}_1 = -m\omega_0{}^2\vec{r}$ est une force de rappel, du type ressort, qui tend à ramener l'électron "élastiquement lié" vers une "situation d'équilibre".

La force $\vec{f}_2 = -m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$ est une force d'amortissement ou de frottement de type visqueux, force due aux chocs de l'électron sur les autres particules et surtout au rayonnement de l'électron accéléré.

A.2) L'onde progressive plane monochromatique est tellse que $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{v_\varphi}$. En admettant que $v_\varphi \approx C$, on peut négliger l'action du champ magnétique sur l'électron, puisque la vitesse de celui-ci est très inférieure à C.

A.3) L'équation du mouvement de l'électron s'obtient par application du principe fondamental de la dynamique (non relativiste) à l'électron :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\omega_0{}^2\vec{r} - m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt}$$

A.4) En régime forcé, si l'on admet que l'accélération $\vec{a}$ vaut : $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\P\vec{v}}{\P t} + (d)\vec{v}»\frac{\P\vec{v}}{\P t}$, si l'on néglige les termes non linéaires de convection (hypothèse de mouvements d'amplitude très faible des électrons), alors, si l'on pose $\underline{\vec{r}} = \underline{\vec{r}_0}.e^{i\omega t}$:

$-m\omega^2\underline{\vec{r}} = -e\underline{\vec{E}} - m\omega_0{}^2\underline{\vec{r}} - im\gamma\omega\underline{\vec{r}}$

d'où : $\underline{\vec{r}} = \frac{-e\underline{\vec{E}}}{\left(w_{0^2} - w^2\right) + imgw}$

d'où le moment dipolaire induit : $\underline{\vec{p}} = -\ e\underline{\vec{r}} = \frac{\frac{e^2}{m}\underline{\vec{E}}}{\left(w_{0^2} - w^2\right) + igw}$

d'où, enfin, la polarisation : $\underline{\vec{P}} = n_2\underline{\vec{p}} = \frac{\frac{n_2 e^2}{m}\underline{\vec{E}}}{\left(w_{0^2} - w^2\right) + igw}$ (1)

A.5.a) Les équations de Maxwell dans un milieu non magnétique, neutre électriquement et sans courant de conduction s'écrivent :

$$div\vec{E} = \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_p + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A.5.b) Relations entre densité de charge de polarisation, courant de polarisation et polarisation:

$$\rho_p = -div\vec{P} \qquad \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

A.5.c) L'équation de propagation du champ électrique s'obtient en formant le rotationnel de son rotationnel ; d'où :

$$\vec{rot}\left(\vec{rot}\vec{E}\right) = gr\{\vec{ad}(\ ) - D\vec{E} = \vec{rot}\left(-\frac{\P\vec{B}}{\P t}\right) = -\frac{\P\left(\vec{rot}\vec{B}\right)}{\P t} = -\frac{\P}{\P t}\left[m_0\vec{j}_p + m_0 e_0 \frac{\P\vec{E}}{\P t}\right]$$

d'où : $-D\vec{E} + m_0 e_0 \frac{\P^2\vec{E}}{\P t^2} = -m_0 \frac{\P\vec{j}_p}{\P t} - gr\{\vec{ad}(\ )$

or : $div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0$ car : $\vec{E} = E(z,t)\vec{u}_x$

alors, daprès l'équation de Maxwell-Gauss : $div\vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_p = 0 \Rightarrow div\vec{P} = 0$

de plus : $\varepsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$

donc : $\Delta\vec{E} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$

et, puisque : $\vec{E} = E(z,t)\vec{u}_x$, on obtient finalement : $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$ (2)

A.6) En notation complexe, avec $\omega_2{}^2 = \frac{n_2 e^2}{m\varepsilon_0}$, l'équation (2) devient :

$$-\underline{k}^2 . \underline{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{C^2} . \underline{\vec{E}} = -\mu_0 \omega^2 \underline{\vec{P}}$$

et, en utilisant l'équation (1) : $\underline{k}^2 = \frac{w^2}{C^2}\left(1 + \frac{w_{2^2}}{\left(w_{0^2} - w^2\right) + igw}\right)$

d'où : $\underline{n}^2 = \frac{C^2 k^2}{w^2} =$

et, en utilisant l'approximation proposée :

$$n' = 1 + \frac{w_{2^2}\left(w_{0^2} - w^2\right)}{2\left[\left(w_{0^2} - w^2\right)^2 + g^2 w^2\right]}$$

$n = \{ \{ ital\ gww\ rSub \{ size\ 8\{2\}\ \ rSup \{ size\ 8\{2\} \} \} \}\ over\ \{2\ left [\ left (w\ rSub \{ size\ 8\{0\}\ \ rSup$

remarque : l'approximation proposée n'est en général pas valable au voisinage de $\omega = \omega_0$ (résonance), sauf si γ est important (amortissement important)

A.7) Le champ électrique complexe s'écrit alors : $\underline{\vec{E}} = E_0 exp$

et le champ électrique réel s'écrit alors : $\vec{E} = E_0 exp$

L'indice de réfraction n' joue le rôle de l'indice ordinaire des lois de Descartes et permet de calculer la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{C}{n'}$

L'indice d'extinction ou d'absorption n" intervient pour expliquer l'amortissement de l'onde lorsqu'elle se propage selon Oz, amortissement dû au caractère conducteur du milieu

A.8) On utilise la rtelation de Maxwell-Faraday : $\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, qui s'intègre par rapport à t, en négligeant tout champ magnétostatique, en :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{C} exp$$

A.9) La densité volumique d'énergie électromagnétique $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$ contient donc en facteur un terme d'amortissement : exp ; la distance δ sur laquelle cette densité volumique est divisée par un facteur e est donc telle que : $\frac{2\omega n''\delta}{C} = 1$; donc : $\delta = \frac{C}{2\omega n''}$

A.10) pour la fréquence f_0 : $n''(\omega_0) = 8{,}25.10^{-9}$ (on a bien $\beta << 1$)

$\delta(\omega_0) = 2{,}46$ m

pour la fréquence $f = \frac{C}{\lambda}$, avec $\lambda = 0{,}60$ µm : $n''(\omega) = 9{,}51.10^{-13}$ (on a bien $\beta << 1$)

$\delta(\omega_0) = 50{,}2$ km

Les rayons U.V. (ultra-violets, correspondant à ω_0) sont arrêtés par la couche d'ozone, alors que la lumière visible (λ de l'ordre de 0,60 µm) passe à travers cette couche

A.11) L'atmosphère primitive était très différente de l'atmosphère actuelle et ne comportait, en particulier, pas d'ozone. Les molécules de chimie organique, détruites par les U.V., n'ont pu se développer que dans un solvant protecteur des U.V. : l'eau.

B) BILAN THERMIQUE DE LA TERRE DANS LA TROPOSPHERE

B.1) σ s'exprime en $W.K^{-4}.m^{-2}$.

B.2) Le rayonnement émis par le soleil étant isotrope : $P_S = \sigma . T_S^{\,4} . 4\pi R_S^{\,2}$.

B.3) La puissance reçue par la terre est :

P_S.(angle solide sous lequel depuis le soleil on voit la terre)/(angle solide sous lequel depuis le soleil on voit tout l'espace)

donc la puissance reçue par la terre est: $P_S . \frac{\pi R_T^{\,2}}{4\pi d^2} = \sigma T_S^{\,4} . \frac{\pi R_T^{\,2} R_S^{\,2}}{d^2}$

B.4) En régime permanent : $sT_{P^4}.\,4pR_{T^2} = (1 - A)sT_{S^4}.\frac{pR_{T^2}R_{S^2}}{d^2}$

donc : $T_P = T_S\left[(1 - A)\frac{R_{S^2}}{4d^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ (3)

B.5) Application numérique : T_P = 252 K (c'est-à-dire : - 21 °C)
On trouve une température manifestement trop basse : le modèle utilisé est trop simpliste.

B.6) L'erreur commise est : $4\pi R_T + e - 4\pi R_T^{\,2} \approx 8\pi e R_T$

L'erreur relative est inférieure à 10^{-2} si : $\frac{8\pi e R_T}{4\pi R_T^{\,2}} < 10^{-2}$, c'est-à-dire : $e < 10^{-2}\,\frac{R_T}{2}$

Application numérique : e_{max} = 32 km

B.7) Avec les hypothèses du texte, on peut faire les bilans énergétiques suivants :

<u>bilan énergétique du sol :</u>

puissance rayonnée par le sol = puissance provenant de l'atmosphère + puissance provenant du sol

c'est-à-dire : $sT_{0^4}.\,4pR_{T^2} = sT_{1^4}.\,4pR_{T^2} + (1 - \alpha)(1 - A)sT_{S^4}\frac{pR_{S^2}R_{T^2}}{d^2}$

d'où : $T_{0^4} = T_{1^4} + (1 - \alpha)(1 - A)T_{S^4}\frac{R_{S^2}}{4d^2}$ (5)

bilan énergétique de la troposphère :

puissance rayonnée par la troposphère = puissance rayonnée par la terre + puissance provenant du soleil

c'est-à-dire : $2sT_{1^4}.4pR_{T^2} = sT_{0^4}.4pR_{T^2} + \alpha(1 - A)sT_{S^4}\frac{R_{S^2}}{4d^2}$

d'où : $2T_{1^4} = T_{0^4} + \alpha(1 - A)T_{S^4}\frac{R_{S^2}}{4d^2}$ (6)

donc, si on remplace dans (5) et (6) $T_S{}^4$ en fonction de $T_P{}^4$, selon (3) : $T_{P^4} = T_{S^4}.\left[(1 - A)\frac{R_{S^2}}{4d^2}\right]$
on obtient :

$T_{0^4} = T_{1^4} + (1 - \alpha)T_{P^4}$ (5')

$2T_{1^4} = T_{0^4} + \alpha T_{P^4}$ (6')

B.8) La résolution de (5') et (6') conduit à :

$$T_1 = T_P$$

$$T_0 = T_P(2 - \alpha)^{\frac{1}{4}}$$

Application numérique : T_1 = 252 K (c'est-à-dire - 21 °C)

T_0 = 286,5 K (c'est-à-dire 13,5 °C)

Le modèle est donc plus raisonnable que le précédent (pour les régions tempérées !),mais il reste encore trop simpliste.