

## Урок 39 Математичний і пружинний маятники. Енергія коливань

### Мета уроку:

**Навчальна:** Формувати знання учнів про математичний та пружинний маятники, уявлення про єдиний характер закономірностей коливальних процесів математичного й пружинного маятників; формувати вміння описувати коливальні рухи маятників за допомогою другого закону Ньютона.

**Розвивальна.** Розвивати пізнавальні навички учнів.

**Виховна.** Виховувати уважність, зібраність, спостережливість.

**Тип уроку:** урок засвоєння нових знань.

**Наочність і обладнання:** навчальна презентація, комп'ютер, підручник.

### Хід уроку

#### I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

#### II. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ ТА ВМІНЬ

Сьогодні на уроці продовжимо вивчати механічні коливання, а саме розглянемо «класичні» коливальні рухи – коливання пружинного та математичного маятників.

#### III. ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

##### 1. Коливання пружинного маятника

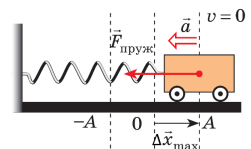
**Пружинний маятник** – це коливальна система, яка являє собою тіло, закріплене на пружині.

##### *Коливання пружинного маятника*

1. *Стан* максимального відхилення від положення рівноваги. ( $t = 0$ )

$$v = 0; \Delta x = \Delta x_{\max}; F_{\text{пруж}} = k\Delta x_{\max};$$

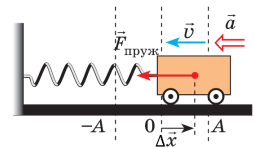
$$E = E_{p \max} \left( E_k = 0; E_p = \frac{k\Delta x_{\max}^2}{2} \right)$$



2. *Прискорений рух* візка, швидкість руху збільшується.

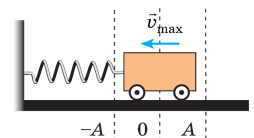
$$v \uparrow; \Delta x \downarrow; F_{\text{пруж}} \downarrow \Rightarrow a \downarrow;$$

$$E = E_k + E_p \left( E_k = \frac{mv^2}{2} \uparrow; E_p = \frac{k\Delta x^2}{2} \downarrow \right)$$



3. *Стан* рівноваги. ( $t = T/4$ )  $F_{\text{пруж}} = 0; a = 0; v = v_{\max}; \Delta x = 0;$

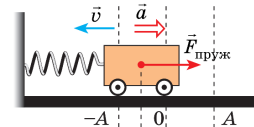
$$E = E_{k \max} \left( E_p = 0; E_k = \frac{mv_{\max}^2}{2} \right)$$



4. *Сповільнений рух* візка, швидкість руху зменшується.

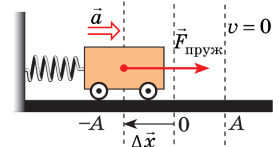
$$v \downarrow; \Delta x \uparrow; F_{\text{пруж}} \uparrow \Rightarrow a \uparrow;$$

$$E = E_k + E_p \left( E_k = \frac{mv^2}{2} \downarrow; E_p = \frac{k\Delta x^2}{2} \uparrow \right)$$



5. *Стан* максимального відхилення від положення рівноваги. ( $t = T/2$ )  $v = 0; |\Delta x| = \Delta x_{\max}; F_{\text{пруж}} = k\Delta x_{\max};$

$$E = E_{p \max} \left( E_k = 0; E_p = \frac{k\Delta x_{\max}^2}{2} \right)$$

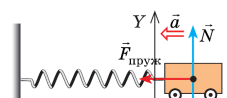


Наступну половину періоду характер руху візка буде таким самим, тільки у зворотному напрямку.

##### **Причини вільних коливань пружинного маятника:**

- 1) сила, що діє на тіло, завжди напрямлена до положення рівноваги;
- 2) тіло, що коливається, є інертним, тому воно не зупиняється в положенні рівноваги (коли рівнодійна сил стає рівною нулю), а продовжує рух у тому самому напрямку.

##### **2. Період коливань пружинного маятника**



$$\vec{F}_{\text{пруж}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad OX: F_{\text{пруж}x} = ma_x$$

$$F_{\text{пруж}x} = -k\Delta x \quad ma_x = -k\Delta x \quad a_x = -\frac{k}{m}\Delta x \quad a_x = -\omega^2\Delta x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

### 3. Математичний маятник

Математичний маятник – це фізична модель коливальної системи, яка складається з матеріальної точки, підвішеної на невагомій і нерозтяжній нитці, та гравітаційного поля.

#### Коливання математичного маятника

1. Стан максимального відхилення від положення рівноваги. ( $t = 0$ ) (рис. а)  
 $v = 0; h = h_{\text{max}}; E = E_{p \text{ max}} (E_k = 0; E_p = mgh_{\text{max}})$

2. Прискорений рух кульки, швидкість руху збільшується. (рис. б)

$$v \uparrow; h \downarrow; E = E_k + E_p \left( E_k = \frac{mv^2}{2} \uparrow; E_p = mgh \downarrow \right)$$

3. Стан рівноваги. ( $t = T/4$ ) (рис. в)

$$v = v_{\text{max}}; h = 0; E = E_{k \text{ max}} \left( E_p = 0; E_k = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} \right)$$

4. Сповільнений рух кульки, швидкість руху зменшується. (рис. г)

$$v \downarrow; h \uparrow; E = E_k + E_p \left( E_k = \frac{mv^2}{2} \downarrow; E_p = \frac{k\Delta x^2}{2} \uparrow \right)$$

5. Стан максимального відхилення від положення рівноваги. ( $t = T/2$ ) (рис. д)

$$v = 0; h = h_{\text{max}}; E = E_{p \text{ max}} (E_k = 0; E_p = mgh_{\text{max}})$$

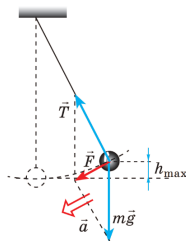


Рис. а

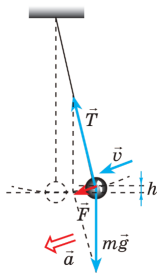


Рис. б

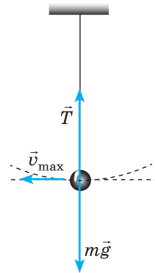


Рис. в

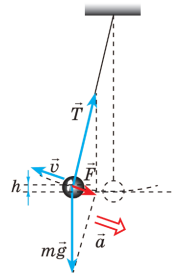


Рис. г

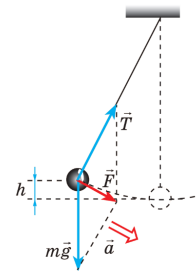


Рис. д

### 4. Період коливань математичного маятника

Формулу періоду коливань математичного маятника вперше одержав у XVII ст. голландський учений Крістіан Гюйгенс, тому її називають формулою Гюйгенса.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

### IV. ЗАКРІПЛЕННЯ НОВИХ ЗНАНЬ І ВМІНЬ

1. На довгій нитці коливається маленька свинцева кулька. Як зміниться період коливань, якщо свинцеву кульку замінити скляною? Чому?

Формула періоду коливань:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Період коливань залежить тільки від довжини нитки маятника та географічної широти, а від маси не залежить, тому якщо свинцеву кульку замінити скляною то період коливань не зміниться.

2. Довжина математичного маятника 5 м. Визначте період його коливань.

**Дано:**

$$l = 5 \text{ м}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$T = ?$$

**Розв'язання**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad T = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{5}{10}} \approx 4,44 \text{ (с)}$$

**Відповідь:**  $T \approx 4,44 \text{ с.}$

3. Визначте масу вантажу, який здійснює 200 повних коливань за 2 хв 40 с на пружині жорсткістю 250 Н/м.

**Дано:**

$$N = 200$$

$$t = 160 \text{ с}$$

$$k = 250 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$m = ?$$

**Розв'язання**

$$T = \frac{t}{N} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \frac{t}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\left(\frac{t}{N}\right)^2 = (2\pi)^2 \cdot \frac{m}{k} \quad m = k \cdot \left(\frac{t}{2\pi N}\right)^2$$

$$m = 250 \cdot \left(\frac{160}{2 \cdot 3,14 \cdot 200}\right)^2 \approx 4 \text{ (кг)}$$

**Відповідь:**  $m \approx 4 \text{ кг.}$

4. До пружини підвісили тягарець, внаслідок чого вона розтягнулась на 16 см. Визначте період вільних коливань тягарця, якщо його відтягли вниз на 8 см і відпустили. Запишіть рівняння цих коливань.

**Дано:**

$$\Delta x = 16 \text{ см} = 0,16 \text{ м}$$

$$A = 8 \text{ см} = 0,08 \text{ м}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$T = ?$$

$$x(t) = ?$$

**Розв'язання**

$$F_{\text{пруж}} = F_{\text{тяж}}$$

$$k\Delta x = mg \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta x}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{\Delta x}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$$

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} = \sqrt{\text{с}^2} = \text{с} \quad T = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,16}{10}} \approx 0,8 \text{ (с)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad [\omega] = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1} \quad \omega = \frac{2\pi}{0,8} = 2,5\pi \text{ (с}^{-1}\text{)}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x = 0,08 \cos \cos \frac{5\pi}{2} t$$

**Відповідь:**  $T \approx 0,8 \text{ с; } x = 0,08 \cos \cos \frac{5\pi}{2} t.$

5. За однаковий час один математичний маятник здійснює 80 коливань, а інший – 120. Визначте, у скільки разів один із них довший за інший.

**Дано:**

$$N_1 = 80$$

$$N_2 = 120$$

$$t_1 = t_2 = t$$

**Розв'язання**

$$T_1 = \frac{t}{N_1} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = \frac{t}{N_2} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

|                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{l_1}{l_2} = ?$ | $\frac{\frac{t}{N_1}}{\frac{t}{N_2}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}}$ $\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$ $\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{120}{80}\right)^2 = 2,25$ <p><b>Відповідь:</b> <math>\frac{l_1}{l_2} = 2,25</math>; перший маятник довший за інший у 2,25 разів.</p> |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

### Бесіда за питаннями

1. Опишіть коливання пружинного маятника. Чому тіло не зупиняється, коли проходить положення рівноваги?
2. За якою формулою визначають період коливань пружинного маятника?
3. Дайте означення математичного маятника.
4. Опишіть коливання математичного маятника. За якою формулою визначають період його коливань?
5. Які перетворення енергії відбуваються під час коливань пружинного маятника? математичного маятника?
6. У якому положенні потенціальна енергія маятника сягає максимального значення? мінімального? Що можна сказати про кінетичну енергію маятника в ці моменти?

## VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Опрацювати § 20, Вправа № 20 (3-4)

### Додаткові задачі

1. Тягарець, підвішений до пружини жорсткістю 75 Н/м, здійснює коливання з амплітудою 6 см. Швидкість тягарця в момент проходження положення рівноваги дорівнює 0,5 м/с. Визначте масу тягарця.

**Дано:**

$$k = 75 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$A = 6 \text{ см} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$v = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$m = ?$

### Додаткова інформація

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Перша похідна від переміщення – то швидкість, друга похідна, тобто похідна від швидкості – то прискорення.

$$v(t) = x'(t) = (A \cos(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = (-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_{\max} = A \quad v_{\max} = A\omega \quad a_{\max} = A\omega^2$$

### Розв'язання

$$1 \text{ спосіб} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$|v_{\max}| = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{\max}^2 = A^2 \cdot \frac{k}{m} \quad m = \frac{kA^2}{v_{\max}^2}$$

$$[m] = \frac{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2}}{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{\text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг}$$

$$m = \frac{75 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2}{0,5^2} = 1,08 \text{ (кг)}$$

**2 спосіб**

$$E_{k0} + E_{p0} = E_k + E_p$$

$$E_{k0} = 0 \text{ (оскільки } v_0 = 0) \quad E_{p0} = \frac{k \Delta x_0^2}{2} = \frac{k A^2}{2}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_p = 0 \text{ (оскільки } x = 0)$$

$$\frac{k A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad m = \frac{k A^2}{v^2}$$

$$m = \frac{75 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2}{0,5^2} = 1,08 \text{ (кг)}$$

**Відповідь:**  $m = 1,08 \text{ кг}$ .

2. Кулька масою 200 г, підвішена до невагомої пружини жорсткістю 20 Н/м, здійснює гармонічні коливання. Визначте зміщення кульки від положення рівноваги в той момент, коли її прискорення становить 3 м/с<sup>2</sup>.

**Дано:**

$$m = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг}$$

$$k = 20 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$a = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$x = ?$

**Додаткова інформація**

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Перша похідна від переміщення – то швидкість, друга похідна, тобто похідна від швидкості – то прискорення.

$$v(t) = x'(t) = (A \cos(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = (-A\omega \sin(\omega t + \varphi_0))' = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$x_{\max} = A \quad v_{\max} = A\omega \quad a_{\max} = A\omega^2$$

**Розв'язання**

$$\{x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \mid a = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)\}$$

$$\frac{a}{x} = \omega^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ma}{k}$$

$$x = \frac{0,2 \cdot 3}{20} = 0,03 \text{ (м)}$$

**Відповідь:**  $x = 3 \text{ см}$ .

3. На двох однакових пружинах у вертикальній площині коливаються тягарці: один – з періодом 3 с, а другий – з періодом 4 с. З яким періодом коливатимуться два тягарці, якщо їх підвісити до однієї з цих пружин?

**Дано:**

$$k_1 = k_2 = k$$

$$T_1 = 3 \text{ с}$$

$$T_2 = 4 \text{ с}$$

$$T = ?$$

**Розв'язання**

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow m_1 = k\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow m_2 = k\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{k\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + k\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}{k}} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$$

$$[T] = \sqrt{c^2 + c^2} = c$$

$$T = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (с)}$$

**Відповідь:**  $T = 5 \text{ с}$ .

4. Визначте період коливань математичного маятника  $OA$  довжиною  $l = 90 \text{ см}$ , якщо у точці  $C$  на відстані  $l/2$  від точки підвісу, вбито цвях.

**Дано:**

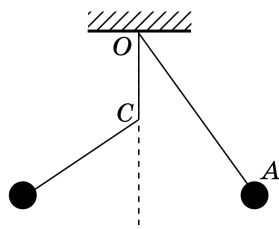
$$l_1 = 90 \text{ см} = 0,9 \text{ м}$$

$$l_2 = \frac{l_1}{2}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$T = ?$$

**Розв'язання**



$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{2g}}$$

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$T = 3,14 \cdot \sqrt{\frac{0,9}{10}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \approx 1,6 \text{ (с)}$$

**Відповідь:**  $T \approx 1,6 \text{ с}$ .

5. Як зміниться хід маятникового годинника, якщо його перемістити з екватора на полюс? На екваторі годинник показував точний час. Прискорення вільного падіння на екваторі:  $g_e = 9,78 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ , на полюсі:  $g_{\pi} = 9,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

**Дано:**

$$t = 24 \text{ год}$$

$$= 8,64 \cdot 10^4 \text{ с}$$

$$g_e = 9,78 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$g_{\pi} = 9,83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\Delta t = ?$$

**Розв'язання**

$$T_e = \frac{t}{N_e} \quad T_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}}$$

$$T_{\pi} = \frac{t}{N_{\pi}} \quad T_{\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{\pi}}}$$

$$\frac{N_{\pi}}{N_e} = \sqrt{\frac{g_{\pi}}{g_e}} \Rightarrow N_{\pi} = N_e \sqrt{\frac{g_{\pi}}{g_e}}$$

$$\Delta N = N_{\pi} - N_e = N_e \left( \sqrt{\frac{g_{\pi}}{g_e}} - 1 \right)$$

$$\Delta t = \Delta NT_e = N_e \left( \sqrt{\frac{g_n}{g_e}} - 1 \right) \cdot \frac{t}{N_e} = t \left( \sqrt{\frac{g_n}{g_e}} - 1 \right)$$

$$\Delta t = 8,64 \cdot 10^4 \left( \sqrt{\frac{9,83}{9,78}} - 1 \right) \approx 220 \text{ (с)}$$

**Відповідь:**  $\Delta t \approx 220$  с; годинник поспішатиме.

6. У ліфті, який рухався рівноприскорено, період коливань математичного маятника дорівнював 1,2 с, а після зупинки – 1,3 с. З яким прискоренням рухався ліфт? У якому напрямку?

**Дано:**

$$T_1 = 1,2 \text{ с}$$

$$T_2 = 1,3 \text{ с}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$l_1 = l_2 = l$$

$$a = ?$$

**Розв'язання**

З умови видно, що період після зупинки збільшується, отже ліфт повинен рухатися з прискоренням, напрямленим вертикально вгору. (Даний факт впливає з формул про вагу тіла, при його русі вгору, або вниз з прискоренням)

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g}{g+a}} \Rightarrow a = g \left( \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 1 \right)$$

$$a = 10 \cdot \left( \left( \frac{1,3}{1,2} \right)^2 - 1 \right) \approx 1,7 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)$$

**Відповідь:**  $a \approx 1,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ; ліфт рухається вгору.

7. Визначте період коливання математичного маятника довжиною 2 м, який висить у вагоні потяга, що рухається з прискоренням  $a = 3 \text{ м/с}^2$ .

**Дано:**

$$l = 2 \text{ м}$$

$$a = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$T = ?$$

**Розв'язання**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a_{\text{рез}}}} \quad a_{\text{рез}} - \text{результуюче прискорення}$$

$$\vec{a}_{\text{рез}} = \vec{a} + \vec{g}$$

У нашому випадку вектори  $\vec{a}$  і  $\vec{g}$  перпендикулярні один до одного. Тоді результуюче прискорення визначимо за теоремою Піфагора:

$$a_{\text{рез}} = \sqrt{a^2 + g^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

$$T = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3^2 + 10^2}}} \approx 2,75 \text{ (с)}$$

**Відповідь:**  $T \approx 2,75$  с.