

**Zadanie 1. (0–3)**

Wykaż, że proste przechodzące przez wierzchołek równoległoboku i środki boków, do których on nie należy, dzielą przekątną równoległoboku na trzy równe części.

**Zadanie 2. (0–4)**

Rozwiąż nierówność

$$|2 - x| + |x + 2| \leq 2x + 4$$

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 3. (0–3)**

Udowodnij, że jeżeli dodatnie liczby  $a, b, c$  tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny oraz  $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ , to liczby  $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}, \frac{1}{\log_c x}$  dla każdego  $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$  tworzą w tej kolejności ciąg arytmetyczny.

**Zadanie 4. (0–5)**

Rozwiąż równanie

$$2\sin 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 4\cos x$$

w zbiorze  $[0, 2\pi]$ .

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 5. (0–3)**

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego  $(a_n), n \in N_+$  jest równa 5, a suma wyrazów o numerach nieparzystych jest równa  $\frac{10}{3}$ . Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 6. (0–3)**

Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n$$

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 7. (0–3)**

Na stu mężczyzn pięciu i na 1000 kobiet dwie nie rozróżniają kolorów (są daltonistami). Z grupy o jednakowej liczbie kobiet i mężczyzn wylosowano jedną osobę.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana osoba jest mężczyzną, jeśli okazała się daltonistą. Wynik zapisz w postaci ułamka dziesiętnego w zaokrągleniu do części setnych.

**Zadanie 8. (0–3)**

Dany jest okrąg o środku w punkcie  $S(-6, 1)$  i promieniu długości  $\sqrt{20}$ .

Napisz równania stycznych do tego okręgu równoległych do prostej  $2x + y + 2 = 0$ .

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 9. (0–6)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie

$$x^2 - 3mx + 2m^2 + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania takie, że każde należy do przedziału  $(-\infty, 3)$ .

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 10. (0–5)**

W czworokącie wypukłym  $ABCD$  o polu równym 9 dane są:  $|AD| = |BD|$ ,  $|BC| = |DC|$ ,  $|\sphericalangle BCD| = 100^\circ$ ,  $|\sphericalangle ADB| = 20^\circ$ .

Oblicz iloczyn długości przekątnych tego czworokąta.

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 11. (0-3)**

Pole powierzchni bocznej walca jest równe  $P$ , a objętość wynosi  $V$ .

Oblicz tangens kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego walca do płaszczyzny podstawy.

Zapisz obliczenia.

**Zadanie 12. (0–4)**

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do podstawy pod kątem  $\alpha$ . Pole ściany bocznej jest równe  $P$ .

Oblicz objętość ostrosłupa.

Zapisz obliczenia.

### Zadanie 13.

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty prostokątne  $ABC$  o przeciwprostokątnej  $AB$  i obwodzie równym 8. Niech  $x = |AC|$ .

#### Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że pole  $P$  trójkąta  $ABC$  jako funkcja zmiennej  $x$  jest określone wzorem

$$P(x) = \frac{x(16 - 4x)}{8 - x}, \text{ gdzie } x \in (0, 4)$$

#### Zadanie 13.2. (0–3)

Korzystając z powyższego wzoru, oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

Zapisz obliczenia.