
EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
307 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
EBAU2024 - JUNIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a: $\{2x + ay + 4z = 2\ ax + 2y + 6z = 0\ 4x + 2ay + 10z = a$. (2 puntos) Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (2\ a\ 4\ a\ 2\ 6\ 4\ 2a\ 10\ )$ y $A^* = (2\ a\ 4\ 2\ a\ 2\ 6\ 0\ 4\ 2a\ 10\ a\ )$

det A = 40 + 24a + 8a^2 – 32 – 24a – 10a^2 = 8 – 2a^2 = 0 ⇔ a^2 = 4 ⇔ a = ±2

– Si a ≠ ±2, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si a = –2,

$A^* = (2\ -2\ 4\ 2\ -2\ 2\ 6\ 0\ 4\ -4\ 10\ -2\ )\ f1:2\ f2:2\ f3:2\ (1\ -1\ 2\ 1\ -1\ 1\ 3\ 0\ 2\ -2\ 5\ -1\ )\ f2 + f1\ f3 -$

La 2ª fila corresponde a la ecuación 0 = 16, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible

– Si a = 2, det A = 0, $A = (2\ 2\ 4\ 2\ 2\ 6\ 4\ 4\ 10\ )$. Como $|2\ 4\ 2\ 6\ | = 4 \neq 0$, rg A = 2

$A^* = (2\ 2\ 4\ 2\ 2\ 2\ 6\ 0\ 4\ 4\ 10\ 2\ )\ f1:2\ f2:2\ f3:2\ (1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 3\ 0\ 2\ 2\ 5\ 1\ )\ f2 - f1\ f3 - 2f1\ (1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 1\ -1\ )\ f3 = f2\ (1\ 1\ 2\ 1\ 0\ 0\ 1\ -1\ )$.

Como $|1\ 2\ 0\ 1\ | = 1 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Para a = 0, sabemos que el sistema es compatible determinado, tiene solución única
$A^* = (2\ 0\ 4\ 2\ 0\ 2\ 6\ 0\ 4\ 0\ 10\ 0\ )f1:2\ f2:2\ f3:2\ (1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 0\ 2\ 0\ 5\ 0\ )\ f3 - 2f1\ (1\ 0\ 2\ 1\ 0\ 1\ 3\ 0\ 0\ 0\ 1\ -$
que corresponde al sistema

$\{x + 2z = 1\ y + 3z = 0\ z = -2$. Despejando, y = –3z = –3(–2) = 6 ; x = 1 – 2z = 1 – 2(–2) ; x = 5.

La solución única es x = 5, y = 6, z = –2

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2 € y el de pienso compuesto de 3 €.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

Resolución

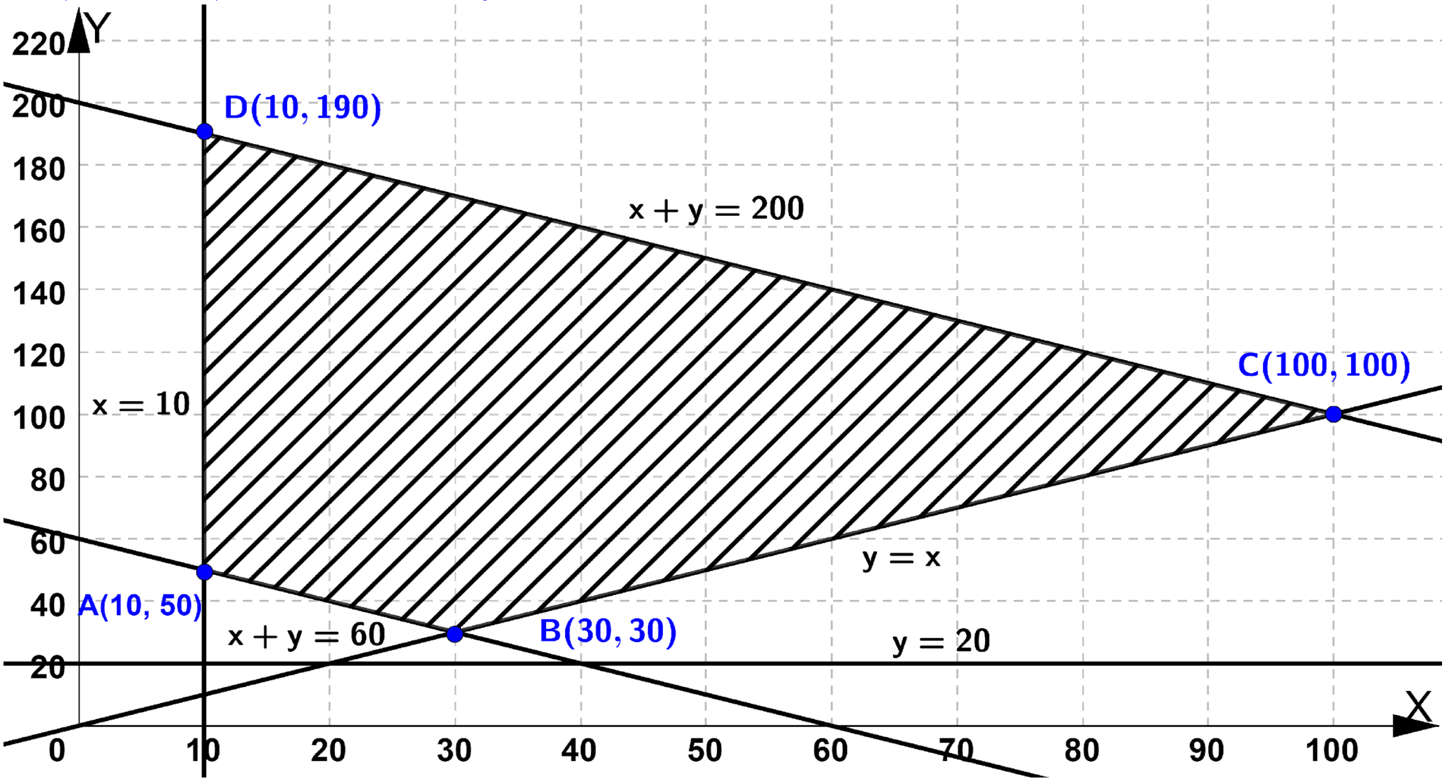
Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de contenedores	**gasto (en €)**
cereales	x	2x
piensos	y	3y
total	x + y	2x + 3y

Función a optimizar (minimizar), gasto f(x, y) = 2x + 3y. Las restricciones son

$\begin{cases} x \geq 10 \\ y \geq 20 \\ x \leq y \\ 60 \leq x + y \leq 200 \end{cases}$

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice alcanza el valor mínimo el gasto f(x, y) = 2x + 3y

f(A) = f(10, 50) = 2.10 + 3.50 = 170 f(B) = f(30, 30) = 2.30 + 3.30 = 150

f(C) = f(100, 100) = 2.100 + 3.100 = 500 f(D) = f(10, 190) = 2.10 + 3.190 = 590

El gasto mínimo es 150 € y se obtiene almacenando 30 contenedores de cada tipo.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^2 - 18q + 14$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda p = 10 – q, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)

b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)

c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)

d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Resolución

a) El beneficio es ingresos menos costes.

Ingresos: precio por unidad x unidades producidas: $I(q) = q(10 - q)$; Costes: $C(q) = q^2 - 18q + 14$

La función beneficio es entonces $B(q) = I(q) - C(q) = 10q - q^2 - q^2 + 18q - 14 = -2q^2 + 28q - 14$

b) $B'(q) = -4q + 28 = 0 \Leftrightarrow q = 7$; $B''(q) = -4$; $B''(7) = -4 < 0$ (máximo para $q = 7$)

Luego, el beneficio es máximo cuando se producen 7 unidades

c) Como el beneficio máximo es para $q = 7$, el precio de venta óptimo es $p = 10 - q = 10 - 7 = 3$ €

d) El beneficio máximo sería entonces $B(7) = -2.7^2 + 28.7 - 14 = 84$ €

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos
$f(x) = \{3x - 3,\ si\ 0 < x < 3\ ax^2 - 6x + 3a,\ si\ x \geq 3$
a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en x = 3. (1 punto)

Resolución

Para $x \neq 3$, f es continua en su dominio, que es R, independientemente del valor de a por ser el resultado de operar con funciones continuas.

Como debe ser continua en x = 3, entonces

$f(x) = f(x) \Rightarrow\ 3.3 - 3 = a3^2 - 6.3 + 3a \Rightarrow 6 = 12a - 18 \Rightarrow a = 2$

Conclusión: debe ser $a = 2$

b) Para este valor de a y para $x \geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto x = 3 (1,5 puntos)

Resolución

Como $a = 2$, $x \geq 3$, $f(x) = 2x^2 - 6x + 6$; $f'(x) = 4x - 6$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la

función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = 3$, $f(x_0) = f(3) = 2.3^2 - 6.3 + 6 = 6$; $f'(x_0) = f'(3) = 4.3 - 6 = 6$

rtg: $y = 6(x - 3) + 6 \Rightarrow$ rtg: $y = 6x - 6$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:
a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)

Resolución

Como el denominador se anula para $x = \pm 1$, entonces Dom f = R – {±1}

Como $f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1$ y $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (imposible), la gráfica de f sólo corta al eje Y en el punto (0, –1) y no corta al eje X

b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)

Resolución

$f(x) = \frac{(-1)^2+1}{0} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = –1 de ecuación A.V. : x = –1

Además, $f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$ y $f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$f(x) = \frac{1^2+1}{0} = \frac{2}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = 1 de ecuación A.V. : x = 1

Además, $f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ f tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$, que es la recta de ecuación y = 1

$Si\ x \rightarrow \pm\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{x^2+1}{x^2-1} - 1 = \frac{2}{x^2-1} > 0 \Rightarrow$ la gráfica está "por encima" de la asíntota

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Resolución

$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Hagamos una tabla de signos de f´(x)

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f´(x)	+	∄	+	0	–	∄	–
f(x)	creciente	∄	creciente	máximo	decreciente	∄	decreciente

f es creciente en $(-\infty, 0) - \{-1\}$ y decreciente en $(0, +\infty) - \{1\}$

Máximo relativo: $x = 0$, $y = f(0) = -1$, punto $(0, -1)$. No hay mínimo relativo

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = x^2 + 4$ y la recta $g(x) = x + 4$. Calcular su área.

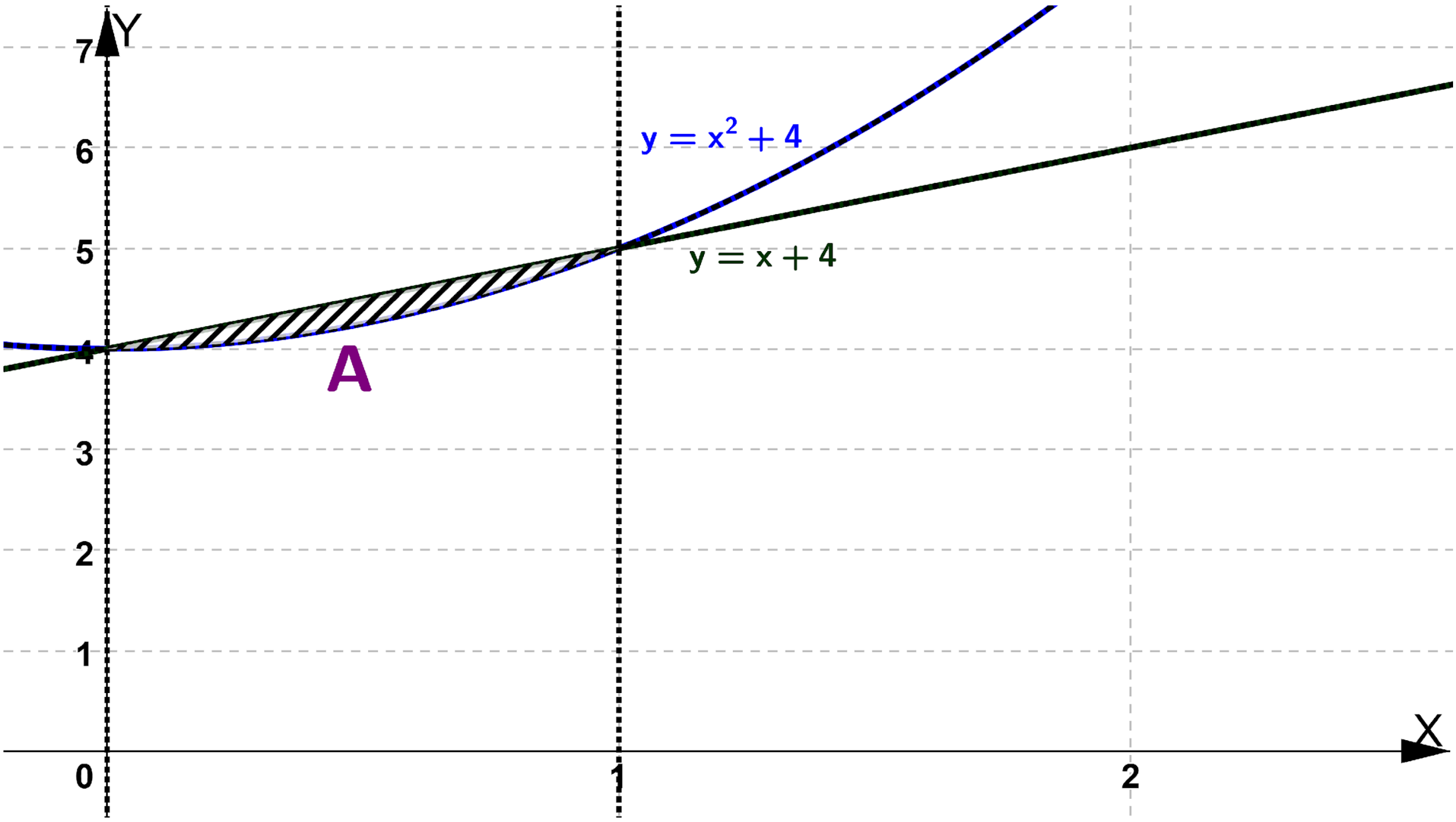
Resolución

Tenemos en cuenta que la gráfica de f es una parábola convexa que sólo corta al eje Y en (0, 4).

Puntos de corte entre la parábola y la recta:

$\{y = x^2 + 4\; y = x + 4 \Rightarrow x^2 + 4 = x + 4 \Rightarrow x^2 - x = x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = 4,\ (0, 4)\ ;\quad x = 1,\ y =$

El recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_0^1 \left[x + 4 - \left(x^2 + 4\right)\right] dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$. Una primitiva de $(x - x^2)$ es

$p(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2 - 2x^3}{6}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(1) - p(0) = \frac{3.1^2 - 2.1^3}{6} - \frac{3.0^2 - 2.0^3}{6} = \frac{1}{6} \cong 0,167\ u^2$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

a) Calcular $\int f(x)\, dx$. (1 punto)

Resolución

Como $\left[\ln ln \left(e^x + 2\right)\right]' = \frac{e^x}{e^x + 2} = f(x)$, entonces $F(x) = \ln ln \left(e^x + 2\right)$ es una primitiva de f(x)

Por tanto, $\int f(x)\, dx = \ln ln \left(e^x + 2\right) + k$, con $k \in R$

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función f(x) y las rectas x = 0 y x = 1. (1,5 puntos)

Resolución

$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2} > 0$ y como $F(x) = \ln ln \left(e^x + 2\right)$ es una primitiva de f(x), por la regla de Barrow, el área que

---

se pide es $A = \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \ln ln\left(e^1 + 2\right) - \ln ln\left(e^0 + 2\right) = \ln ln\left(\frac{e+2}{3}\right) \cong 0,45\, u^2$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.

i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)

ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos)

Resolución

A = usar el ascensor A B = usar el ascensor B C = averiarse el ascensor. Según el enunciado

p(A) = 45% = 0,45 p(B) = 100% – 45% = 55% = 0,55 p(C/A) = 5% = 0,05 p(C/B) = 8% = 0,08

i) Se pide p(C) que, usando el teorema de probabilidad total es

$p(C) = p(A)\, p(C/A) + p(B)\, p(C/B) = 0,45\, .\, 0,05 + 0,55\, .\, 0,08 = 0,0665 = 6,65\%$

ii) Se pide $p\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(B)\, p(C/B)}{p(C)} = \frac{0,55\, .\, 0,08}{0,0665} = \frac{\frac{2}{5}\ \frac{2}{5}}{\frac{12}{25}} \cong 0,6617 = 66,17\%$

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto)

Resolución

X = duración $\rightarrow N(\mu, 3)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 94% para estimar la duración media, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 10$ la media de una muestra de tamaño n = 100

y $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,94}{2} = 0,97$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,97$ *usando la tabla de la* $N(0,1)$ $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,88$. Sustituyendo,

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}} = 0,564$; $I_c = (10 - 0,564\, ; 10 + 0,564) = (9,436\, ; 10,564)$