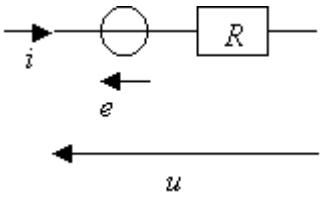
I.A Voir figure.



I.B Avec frottement, en régime permanent,

$$C = \alpha\omega' = \Phi_0 i \quad \text{et} \quad E = \Phi_0\omega' + Ri \Rightarrow \omega' = \frac{E}{\Phi_0 + \frac{\alpha R}{\Phi_0}}.$$

L'absence de frottement se traite en faisant $\alpha = 0$ dans la formule précédente : $\omega = \frac{E}{\Phi_0}$.

$$\frac{v'}{v} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1+\frac{\alpha R}{\Phi_0{}^2}} = \frac{1}{1+\frac{1{,}5.10^{-3}}{0{,}17^2}} = 0{,}95$$

D'où .

I.C Le moteur reçoit une puissance électrique Ei et produit une puissance mécanique $C\omega'$ qui sert à vaincre les frottements externes ; son rendement est donc $\eta = \frac{C\omega'}{Ei} = \frac{\Phi_0\omega'}{E} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{v'}{v} = 0{,}95$.

Il est compris entre 0 (grand frottement et grande résistance) et 1 (pas de frottement ou pas de résistance).

I.D

$$\left.\begin{array}{l} u = \Phi_0\omega + Ri \\ J\dot{\omega} = C = \Phi_0 i \\ \omega = \frac{v}{D} \end{array}\right\} \Rightarrow u = \frac{\Phi_0 v + \frac{RJ\dot{v}}{\Phi_0}}{D} \Rightarrow T_{V\cdot U} = \frac{D}{\Phi_0 + \frac{RJ}{\Phi_0}p}$$

de la forme $\frac{A}{1+p\tau_{em}} \Rightarrow \tau_{em} = \frac{RJ}{\Phi_0{}^2}$.

Comme $V = pX$, $T_{X\cdot U} = \frac{T_{V\cdot U}}{p}$.

I.E $J\frac{\dot{v}}{D} = \Phi_0 i \Rightarrow T_{V\cdot I} = \frac{D\Phi_0}{Jp}$.

II.A

$$J\dot{\omega} = C = \Phi_0 i \Rightarrow i = \frac{J\dot{v}}{D\Phi_0}$$

$$u = e + Ri = \frac{\Phi_0 v}{D} + \frac{RJ\dot{v}}{D\Phi_0}$$

$u = 0$ si $t < 0$, $u = U_M$ constant si $t > 0$. Dans ce dernier cas, la solution de l'équation différentielle gouvernant v est $v(t) = \text{cste}.\exp\left(-\frac{t}{\tau_{em}}\right) + \frac{DU_M}{\Phi_0}$, où

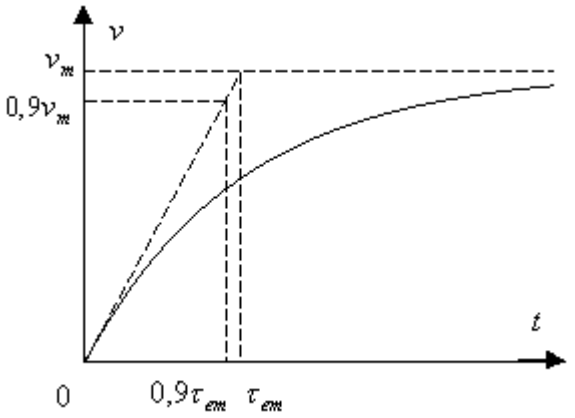
$\tau_{em} = \frac{RJ}{\Phi_0{}^2} = \frac{1{,}5.10^{-3}}{0{,}17^2} = 51{,}9\,\text{ms}$. La vitesse étant une fonction continue du temps,

$$v(0) = 0 \Rightarrow v = \frac{DU_M}{\Phi_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{em}}\right)\right].$$

L'instant t où v atteint 90 % de sa valeur finale, soit $0{,}9v_m$ est tel que

$$1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_{em}}\right)=0{,}9 \Rightarrow t=\tau_{em}\ln 10=119{,}5\,\text{ms}$$

II.B Si l'intensité est constante, l'accélération est constante. Le graphe de la vitesse en fonction du temps est une droite tangente au graphe de $v(t)=\frac{DU_M}{\Phi_0}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_{em}}\right)\right]$ de la question précédente, puisque l'accélération initiale est la même. L'instant où la vitesse atteint 90 % de la valeur finale est $0{,}9\tau_{em}=46{,}7\,\text{ms}$ d'après le fait que la tangente à l'exponentielle coupe son asymptote au bout d'une durée égale à sa constante de temps. Cette durée est plus courte que la précédente, puisque l'accélération atteint constamment sa valeur maximale.



II.C Avec un échelon de tension,

$$U_M=\frac{\Phi_0 v}{D}+\frac{RJ}{D\Phi_0}=\frac{\Phi_0(v+\tau_{em})}{D}$$

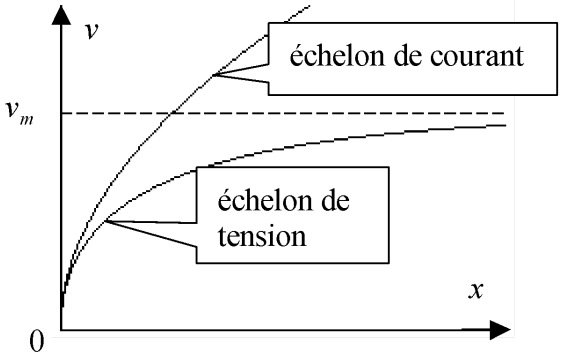
$$v_m=\frac{DU_M}{\Phi_0}=v+\tau_{em}=v+\tau_{em}\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{\tau_{em}}\left(\frac{v_m}{v}-1\right)$$

d'où le tableau de variation :

t	0		∞
x	0	$\uparrow$	∞
$\frac{dv}{dx}$	∞	$\downarrow$	0
v	0	$\uparrow$	v_m

et la forme de la trajectoire de phase ci-contre.



Avec un échelon de courant, l'accélération est constante, $x=\frac{v^2}{2}$: la trajectoire de phase est la parabole ci-contre de sommet l'origine et d'axe celui des x.

II.D.1)

II.D.1)	II.D.2)	II.D.3)

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega \quad \tau_m = \frac{J}{\alpha} = \frac{10^{-3}}{10^{-3}} = 1\,\text{s}$$

$$v = V_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right) \quad x = V_0\tau_m\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_m}\right)\right]$$

Le mobile s'arrête au bout d'un temps infini après avoir parcouru $V_0\tau_m = 4{,}4\,\text{m}$. Sa trajectoire de phase est le segment de droite figuré ci-dessus.

II.D.2) ω et v sont des fonctions continues du temps. Comme $u = \Phi_0\frac{v}{D} + Ri = 0$, $i(0) = -\frac{\Phi_0 V_0}{DR} = -\frac{0{,}17\times 4{,}4}{0{,}05\times 1{,}5} = 10\,\text{A}$: on freine de façon optimale au début ; par la suite, la vitesse diminuant, le courant diminue et reste en dessous de sa borne I_{Max}.

$\left.\begin{array}{l}\Phi_0\omega + Ri = 0\\ J\dot{\omega} = \Phi_0 i - \alpha\omega\end{array}\right\} \Rightarrow J\dot{\omega} = \left(\alpha + \frac{\Phi_0^{\,2}}{R}\right)\omega$ de la forme $\dot{\omega} = -\frac{\omega}{\tau'_{em}}$ où $\frac{1}{\tau'_{em}} = \frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_{em}}$.

Le mouvement est semblable à celui de la question précédente en remplaçant τ_m par τ'_{em}. La nouvelle distance d'arrêt est

$$V_0\tau'_{em} = \frac{4{,}4}{\frac{1}{1} + \frac{1}{0{,}0519}} = 0{,}217\,\text{m}$$

La machine à courant continu fonctionne pendant cette phase en générateur d'énergie électrique, et non en moteur : elle convertit l'énergie cinétique du mobile en énergie électrique.

II.D.3) $J\dot{\omega} = -\Phi_0 I_{Max} - \alpha\omega$

$\alpha\omega = \frac{\alpha v}{D}$ est borné par $\frac{\alpha V_0}{D} = \frac{4{,}4.10^{-3}}{0{,}05} = 0{,}088\,\text{N.m}$ qui est négligeable devant $\Phi_0 I_{Max} = 0{,}17\times 10 = 1{,}7\,\text{N.m}$.

$J\dot{\omega} = -\Phi_0 I_{Max}$ conduit à $J\frac{V_0}{Dt_1} = \Phi_0 I_{Max} \Rightarrow t_1 = \frac{JV_0}{D\Phi_0 I_{Max}} = \frac{4{,}4.10^{-3}}{0{,}05\times 0{,}17\times 10} = 51{,}8\,\text{ms}$.

$X_0 = \frac{V_0^{\,2}}{2\dot{v}}$ où $\dot{v} = \frac{V_0}{t_1} \Rightarrow X_0 = \frac{V_0 t_1}{2} = \frac{4{,}4\times 0{,}0518}{2} = 0{,}114\,\text{m}$.

La trajectoire de phase est un arc de parabole tangent au départ à la trajectoire de phase de la question précédente (même accélération, car même courant au départ) :

$$\dot{v} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx} = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J} \Rightarrow v^2 - V_0^{\,2} = -\frac{2D\Phi_0 I_{Max}}{J}x$$

II.D.4) La méthode de la première question est moins efficace, car le couple de freinage est plus faible ; la méthode de la troisième question est plus efficace, car le couple électromécanique est maintenu à sa valeur maximale pendant tout le freinage, alors qu'il ne prend cette valeur qu'au début du freinage dans la méthode de la deuxième question.

III.A Il faut convertir la position x en tension, par exemple en liant le mobile à un curseur se déplaçant le long d'un conducteur ohmique soumis à une tension fixe ; si le curseur ne prélève pas de courant, la tension entre une extrémité et le curseur est proportionnelle à x. Il faut que le contact entre le curseur et le conducteur ohmique soit excellent et que la résistance soit bien fonction linéaire de la longueur.

Cette question est mal définie et peut appeler d'autres réponses. On ne voit pas cet énoncé entend par quantitativement. La précision annoncée de 1 % ne veut rien dire : 1% de quoi ?

III.B.1) La boucle impose $u = -Kx$. D'après I.D, $u = \frac{\Phi_0}{D}\dot{x} + \frac{JR}{\Phi_0 D}\ddot{x} \Rightarrow \frac{JR}{\Phi_0 D}\ddot{x} + \frac{\Phi_0}{D}\dot{x} + Kx = 0$.

Comme $\tilde{t} = \frac{t}{T_0}$, $\frac{d}{dt} = \frac{1}{T_0}\frac{d}{d\tilde{t}} \Rightarrow \frac{JR}{\Phi_0 D T_0^{\,2}}\frac{d^2x}{d\tilde{t}^{\,2}} + \frac{\Phi_0}{DT_0}\frac{dx}{d\tilde{t}} + Kx = 0$. En divisant par KX_0, on obtient $\frac{JR}{K\Phi_0 D T_0^{\,2}}\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^{\,2}} + \frac{\Phi_0}{KDT_0}\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \tilde{x} = 0 \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{JR}{K\Phi_0 D}}$.

III.B.2) $2\sigma = \frac{\Phi_0}{KDT_0} \Rightarrow \sigma = \frac{\Phi_0}{2KDT_0} = \sqrt{\frac{\Phi_0^{\,3}}{4KDJR}}$

III.B.3) L'utilisation de coordonnées réduites permet de déterminer les solutions réellement différentes en les distinguant des solutions semblables à un facteur d'échelle près. Elle permet de mieux voir quelle est l'action des paramètres du problème.

III.C.1) Le cas a) est un régime apériodique (ou critique) ; le cas b) est un régime pseudopériodique.

III.C.2) Soit K_0 la valeur de K qui annule le déterminant réduit $\sigma^2 - 1$ de l'équation caractéristique : $K_0 = \frac{\Phi_0^{\,3}}{4DJR}$. Si $K < K_0$, le régime est apériodique, si $K = K_0$, le régime est critique, si $K > K_0$ le régime est pseudopériodique.

III.C.3) C'est un échelon de consigne. Alors que le mobile est immobile à l'origine, on fait passer brusquement la consigne de 0 à 0,35. Comme la réponse est pseudopériodique, $K > K_0$.

IV.A.1) Etablissons l'équation du portrait de phase :

$$J\frac{\ddot{x}}{D} = \Phi_0 i = -\Phi_0 I_{Max}\,\text{signe}(x)$$

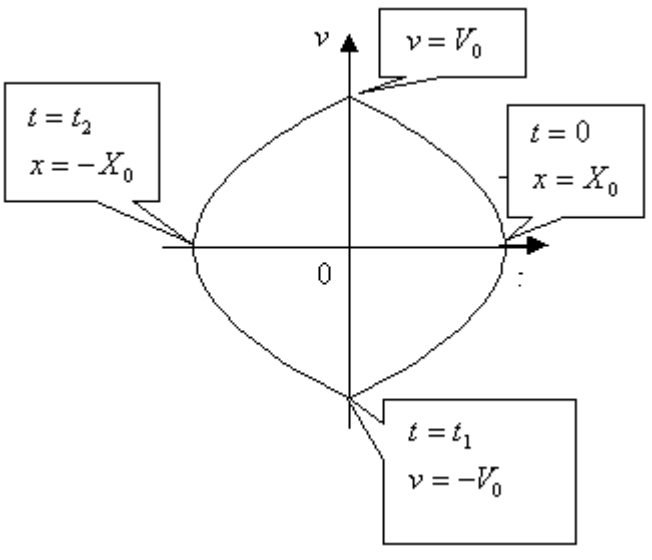
$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx} = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}\text{signe}(x)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}\int_{X_0}^{x}\text{signe}(x)dx = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}\left[|x|\right]_{X_0}^{x} = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}(|x| - X_0)$$

$$|x| = X_0 - \frac{Jv^2}{2D\Phi_0 I_{Max}}$$

si $x > 0$, $x = X_0 - \frac{Jv^2}{2D\Phi_0 I_{Max}}$, si $x < 0$, $x = -X_0 + \frac{Jv^2}{2D\Phi_0 I_{Max}}$

Le portrait de phase est une courbe fermée formée de deux arcs de parabole, chacun limité à sa zone de validité, $x > 0$ ou $x < 0$; les deux paraboles ont pour axe l'axe des x et sont symétriques par rapport à l'axe des v, sur lequel elles se coupent ; le mouvement est une oscillation périodique ; x varie de $-X_0$ à



$$V_0 = \sqrt{\frac{2D\Phi_0 I_{Max} X_0}{J}}$$

X_0 ; la vitesse v varie de $-V_0$ à V_0 , où $= \sqrt{\frac{2\times 0{,}05\times 0{,}17\times 10\times 0{,}35}{10^{-3}}} = 7{,}71\,\mathrm{m.s^{-1}}$

IV.A.2) La valeur maximale du couple de frottement est $\frac{\alpha V_0}{D} = \frac{10^{-3}\times 7{,}71}{0{,}05} = 0{,}15\,\mathrm{N.m}$, tandis que le couple électromécanique est constant et vaut $\Phi_0 I_{Max} = 0{,}17\times 10 = 1{,}7\,\mathrm{N.m}$. Le critère de II.D.3 est tout juste satisfait. Toutefois, il ne s'ensuit pas qu'on peut négliger le frottement fluide sur une durée importante, car, sur une période, le travail de la force électromécanique est nul, alors que le travail de la force de frottement est négatif, donc prépondérant.

IV.A.3)

$$u = \frac{\Phi_0 v}{D} + Ri$$

$$u(0^+) = -RI_{Max} = -15\,\mathrm{volts}$$

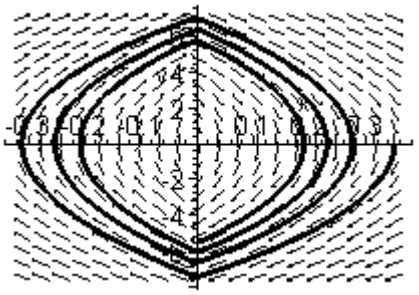
$$u(t_1^-) = \frac{\Phi_0 V_0}{D} - RI_{Max} = \frac{0{,}17\times 7{,}71}{0{,}05} - 15 = 11{,}2\,\mathrm{volts}$$

$$u(t_1^+) = \frac{\Phi_0 V_0}{D} + RI_{Max} = \frac{0{,}17\times 7{,}71}{0{,}05} + 15 = 41{,}2\,\mathrm{volts}$$

$$u(t_2^-) = +RI_{Max} = 15\,\mathrm{volts}$$

Dans l'intervalle (t_1, t_2) , $u > 0$ et $i > 0$, : le moteur reçoit de l'énergie électrique et la source de courant qui l'alimente fonctionne en générateur électrique.

IV.A.4) En raison du frottement fluide, le portrait de phase est formé de spirales se terminant à l'origine. En quelque sorte, le frottement fluide augmente la stabilité. Voici la trajectoire de phase pour la première seconde du mouvement, calculée par $\ddot{x} + \frac{\alpha}{J}\dot{x} + \frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}\mathrm{signe}(x) = 0$, soit $\ddot{x} + \dot{x} + 85\,\mathrm{signe}(x) = 0$:



IV.B.1)

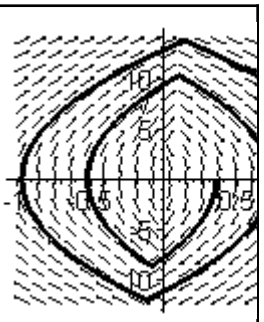
$$J\ddot{\theta} = \Phi_0 i \Rightarrow J\frac{\ddot{x}}{D} = -\Phi_0 I_{Max}\,\mathrm{signe}(x + av)$$

si $x + av > 0$, $\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx} = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = -\frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}x + \mathrm{cste}$

si $x + av < 0$, $\frac{d\frac{1}{2}v^2}{dx} = \frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{D\Phi_0 I_{Max}}{J}x + \mathrm{cste}'$

Ce sont, à une translation horizontale près, les mêmes paraboles que dans la partie IV.A..

IV.B.2)

		
$a = 0{,}01\,\mathrm{s}^{-1}$	$a = 0{,}05\,\mathrm{s}^{-1}$	$a = -0{,}01\,\mathrm{s}^{-1}$

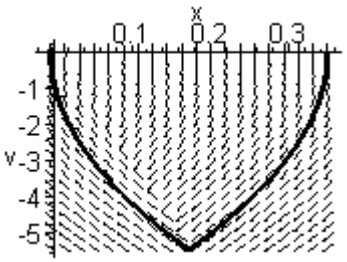
Supposons d'abord a petit et positif (figure de gauche). Les trajectoires de phase sont formées d'une suite d'arcs de parabole ; les paraboles décrites sont des courbes égales, d'axe celui des x, tournant alternativement leur concavité vers la droite et vers la gauche ; les arcs sont limités par la droite BOD d'équation $x + av = 0$. La figure montre que la longueur des arcs décroît ($\mathrm{arc}(CD) < \mathrm{arc}(AB)$, ce qui a pour effet de faire converger la spirale vers l'origine.

Supposons à présent a plus grand et positif (figure du centre). La trajectoire de phase comporte d'abord l'arc de parabole AB, comme précédemment. Mais elle ne peut se poursuivre par un arc de parabole comme l'arc BCD de la figure précédente, car la droite OB d'équation $x + av = 0$ est plus pentue que la tangente en B à cette parabole, si bien que cet arc serait dans la région $x + av > 0$. A partir du voisinage du point B, le courant prend une suite de valeurs alternativement égales à I_{Max} et $-I_{Max}$, chaque valeur ne durant qu'un temps très court, de sorte que le portrait de phase décrit une ligne en zigzag formée alternativement de petits arcs de type AB et de petits arcs de type BC ; comme ces derniers ont une direction plus proche de la droite OB, ils sont plus longs et, en définitive la trajectoire de phase est proche de BO. En moyennant sur le temps, le courant prend une valeur positive variable inférieure à I_{Max} telle que le portrait de phase suive la droite BO et aboutisse ainsi au voisinage de l'origine.

En fait, ce scénario est aussi celui de la fin de la trajectoire de phase si a est petit.

IV.B.3) La figure de droite montre que si $a < 0$, les arcs de paraboles décrits dans les deux régions sont de longueurs croissantes et que le mobile s'éloigne indéfiniment de l'origine.

IV.C.1) Comme les deux arcs de paraboles font partie de paraboles égales d'axes celui des x, ils se coupent au point de coordonnées $x = \dfrac{X_0}{2}, v = V_1$; d'où



$$\frac{X_0}{2} = \frac{J}{2D\Phi_0 I_{Max}} V_1^{\,2}$$

$$a = \frac{X_0}{2V_1} = \frac{X_0}{2}\sqrt{\frac{J}{X_0 D\Phi_0 I_{Max}}} = \sqrt{\frac{JX_0}{4D\Phi_0 I_{Max}}}$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}35.10^{-3}}{4\times 0{,}05\times 0{,}17\times 10}} = 0{,}0321\,\mathrm{s}$$

Comme le mouvement est uniformément varié entre $t = 0$ et $t = t_1$,

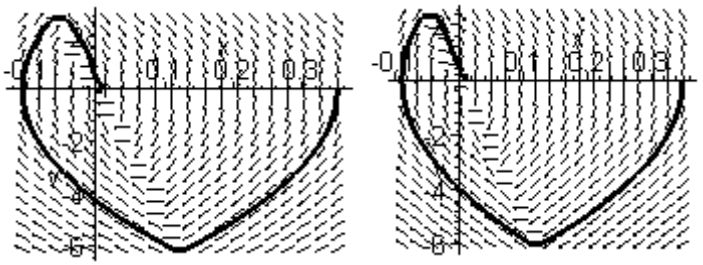
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{X_0}{2}=\dfrac{1}{2}\gamma t_1^{\,2}\\ V_1=\gamma t_1\end{array}\right\}\Rightarrow t_1=\frac{X_0}{V_1}=2a$$

Comme le mouvement est aussi uniformément varié entre t_1 et t_2, $t_2=2t_1=4\times 0{,}0321=128\,\text{ms}$.
IV.C.3) Nous avons essayé de répondre à cette question dans IV.B.2).
IV.D.1)

Sans frottement fluide	Avec frottement fluide

Le portrait de phase est semblable à celui de IV.A, à cela près qu'il s'introduit une zone supplémentaire $-X_S<x<X_S$. En l'absence de frottement fluide, il s'agit d'un oscillateur périodique ; en présence de frottement fluide, il tend lentement vers sa consigne.
IV.D.2) Cette solution n'est pas satisfaisante, car la consigne est atteinte trop lentement.

IV.E.1)Voici les trajectoires de phase pour $a=0{,}02\,\text{s}$ et $X_S=0{,}01\,\text{m}$, à gauche en l'absence de frottement fluide, et à droite en présence de frottement fluide :

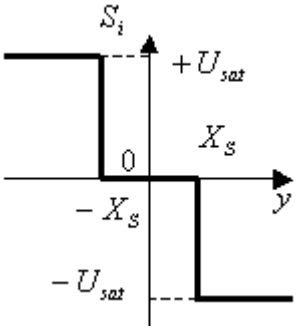


On distingue sur ces schémas les mêmes particularités que dans les graphiques précédents : arcs de paraboles, segments horizontaux dans la zone de seuil, segments parallèles à la droite d'équation $x+av=0$ discutés dans IV.B.2).

IV.E.2) L'incertitude sur la position finale est la somme de deux termes ; le premier est X_S ; les second est dû au retard de commutation du courant autour de $x+av=0$. La position finale est atteinte rapidement.
IV.F.1) Un intégrateur transforme i en v ; il faut inclure dans cet intégrateur la multiplication par une constante convenable.
IV.F.2) Un intégrateur transforme v en x ; il faut inclure dans cet intégrateur la multiplication par une constante convenable.
IV.F.3) Un amplificateur transforme v en av ; un sommateur produit $av+x$; on peut aussi réaliser ces deux opérations par un sommateur dont on modifierait les résistances.
IV.F.4) Appliquons le théorème de Millman au point commun des résistances de gauche et exprimons que le même courant traverse les deux résistances de droite :

$$\frac{S_i}{2R}=\frac{v_-}{R}=\frac{v_+}{R}=\frac{s_1+s_2}{2R}\Rightarrow S_i=s_1+s_2$$

Si $y < -X_S$, $s_1 = s_2 = U_{sat}$; comme S_i ne peut dépasser U_{sat} , $S_i = U_{sat}$, ce qui est conforme à ce que pour l'AO de droite $v_- = \frac{U_{sat}}{2} < v_+ = U_{sat}$;



si $|y| < X_S$, $s_1 = U_{sat}$, $s_2 = -U_{sat}$, $S_i = 0$;

si $y > X_S$, $s_1 = s_2 = -U_{sat}$; comme S_i ne peut être inférieur à $-U_{sat}$, $S_i = -U_{sat}$, ce qui est conforme à ce que pour l'AO de droite $v_- = -\frac{U_{sat}}{2} > v_+ = -U_{sat}$.

La caractéristique $S_i(y)$ est représentée à droite ; c'est l'image électrique de la caractéristique de $i(x+av)$: avec un amplificateur de puissance à la sortie de ce montage, on peut effectivement simuler la commande souhaitée.

IV.F.5) $V(p) = \frac{\Phi_0 DI(p) - \alpha V(p)}{Jp} \Leftrightarrow J\dot{v} = \Phi_0 Di - \alpha v \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = \Phi_0 i - \alpha\omega$. Cette modification permet d'incorporer à la simulation le frottement fluide.

V.A.1) En appliquant le théorème de Millman au point commun des deux résistances,

$$v_+ = \frac{\frac{y}{R_1} + \frac{x}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$x = U_{sat}$ si $\varepsilon = v_+ - v_- > 0 \quad \frac{y}{R_1} + \frac{U_{sat}}{R_2} > 0 \quad y > -\frac{R_1}{R_2}U_{sat} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$

$x = -U_{sat}$ si $\varepsilon = v_+ - v_- < 0 \quad \frac{y}{R_1} - \frac{U_{sat}}{R_2} < 0 \quad y < \frac{R_1}{R_2}U_{sat} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$

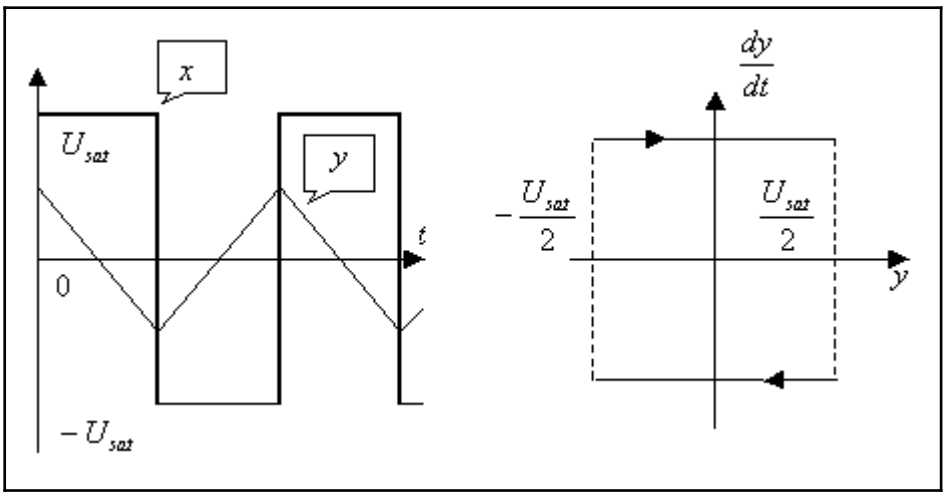
V.A.2) x prend alternativement les valeurs $+U_{sat}$ et $-U_{sat}$; sa primitive, y est une fonction continue du temps : un cycle se compose des deux phases suivantes :

si $x = U_{sat}$, $\frac{dy}{dt} = -\frac{U_{sat}}{RC}$, y décroît de $\frac{U_{sat}}{2}$ à $-\frac{U_{sat}}{2}$; x bascule alors ;

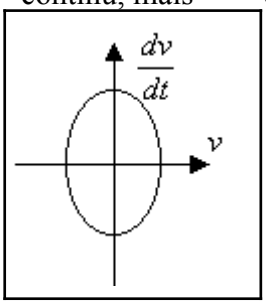
si $x = -U_{sat}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{U_{sat}}{RC}$, y croît de $-\frac{U_{sat}}{2}$ à $\frac{U_{sat}}{2}$; x bascule alors.

D'où : $\left|\frac{dy}{dt}\right| = \frac{U_{sat}}{\frac{T}{2}} = \frac{U_{sat}}{RC} \quad T = 2RC \quad RC = 5.10^{-4}\ \Omega\text{F}$

V.A.3)

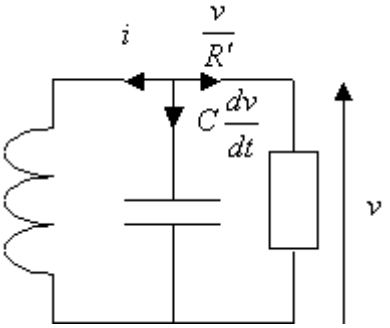


V.B.1) Si $|v|$ traverse S, le courant dans DNL passe de $\pm\frac{S}{R_0}$ à $\mp\frac{S}{R_0}$, donc subit une discontinuité de $\Delta i = \pm\frac{2S}{R_0}$. Le courant est également discontinu dans le condensateur ; v est continu, mais $\frac{dv}{dt}$ est discontinu.



V.B.2) La trajectoire de phase est une ellipse si le circuit est un oscillateur harmonique, donc si la conductance de l'ensemble de la résistance et du DNL s'annule. Cela se produit si $R = -R_0$. Alors $v = v(0)\cos\omega t$. L'amplitude de v est $v(0) = 1\,\mathrm{V}$. Sa fréquence correspond à $LC\omega^2 = 1$, soit $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-4}\times 10^{-9}}} = 503\,\mathrm{kHz}$.

V.B.3) Supposons $v < S$. Soit R' la résistance équivalente à l'ensemble de R et du DNL. $v = L\frac{di}{dt}$



D'après la loi des nœuds, $C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R'} + i = 0$

En dérivant par rapport au temps : $C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R'}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0$.

D'après le critère de Routh, le régime permanent est $v = 0$ si $\frac{1}{R'} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} > 0 \Leftrightarrow R_0 > R$. C'est la condition pour que les racines de l'équation caractéristique aient toutes une partie réelle négative.

V.B.4) Il y a autooscillation dans le cas contraire : $R \geq R_0$. Le plan de phase est partagé alors en trois zones ; dans la zone $|v| < S$, le circuit décrit des portions de spirales s'écartant de l'origine, dans les zones $v < -S$ et $v > S$, le circuit décrit des portions de spirale se rapprochant de l'origine.

V.B.5

$R = 500\,\Omega$ et $R_0 = 2400\,\Omega$	$R = 10\,\text{k}\Omega$ et $R_0 = 250\,\Omega$

Divisons par C l'équation différentielle du circuit : $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R'C}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$. Posons $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et écrivons cette équation sous la forme $\frac{d^2v}{dt^2} + \alpha\omega\frac{dv}{dt} + \omega^2 v = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{R'C\omega} = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Si $R = 500\,\Omega$ et $R_0 = 2400\,\Omega$, $\alpha = \left(\frac{1}{500} - \frac{1}{2400}\right)\sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-9}}} = 0{,}5007$. Comme $0 < \alpha < 2$, le circuit est en régime amorti pseudopériodique ; sa trajectoire de phase est une spirale qui tend vers l'origine.

Si $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $R_0 = 250\,\Omega$, il faut distinguer deux zones :

- pour $|v| < S$, $\alpha = \left(\frac{1}{10000} - \frac{1}{250}\right)\sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-9}}} = -1{,}233 \Rightarrow -2 < \alpha < 0$: dans cette région, la trajectoire de phase est formé de portions de spirales s'écartant de l'origine ;
- pour $|v| > S$, $\alpha = \left(\frac{1}{10000} + \frac{1}{250}\right)\sqrt{\frac{10^{-4}}{10^{-9}}} = 1{,}297 \Rightarrow 0 < \alpha < 2$: dans ces régions, la trajectoire de phase est formée de portions de spirales se rapprochant de l'origine.

Au bout d'un certain temps, la trajectoire de phase se stabilise suivant un cycle fermé : on obtient un oscillateur périodique non sinusoïdal.

V.B.6) Le portrait de l'oscillateur à relaxation étudié présente des discontinuités de la vitesse ; celui de l'oscillateur quasi-sinusoïdal étudié ne présente pas de telle discontinuité et est une courbe d'un seul tenant.

Annexe : programme maple utilisé pour les figures

```
Figure IIB
>
plot([[[0,0.9],[0.9,0.9],[0.9,0]],[[0,0],[1,1],[1,0]],[[0,1],[3,1]],[[0,1.2],[0,0]
,[3,0]],1-exp(-t)],t=0..3,linestyle=[3,3,3,1,1],color=black,axes=none,labels=[``,`
`]);
Figure IIC
>
plot([sqrt(2*x),[[0,1],[3,1]],[[0,1.5],[0,0],[3,0]],[t-1+exp(-t),1-exp(-t),t=0..3]
],x=0..2,0..1.5,color=black,linestyle=[1,3,1,1],axes=none);
Figure IID3
```

```
>
plot([sqrt(1-2*x),[[0,1.2],[0,0],[1.2,0]],[[0,1],[1,0]]],x=0..1.2,0..1.2,color=bla
ck,linestyle=[1,1,3],axes=none,scaling=constrained);
Figure IVA1
>
plot([[1-v^2,v,v=-1..1],[-1+v^2,v,v=-1..1],[[-1.2,0],[1.2,0]],[[0,-1.2],[0,1.2]]],
x=-1.2..1.2,color=black,axes=none);
Figure IVA4
>
DEtools[phaseportrait]({v(t)=diff(x(t),t),diff(v(t),t)+v(t)+85*signum(x(t))},[x(t)
,v(t)],t=0..1,[[v(0)=0,x(0)=0.35]],stepsize=0.001,linecolor=black,color=black);
Figures IVBC
> pp:=proc(a,duree)
>
DEtools[phaseportrait]({diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=-85*signum(x(t)+a*v(t))},[x
(t),v(t)],t=0..duree,[[x(0)=0.35,v(0)=0]],stepsize=0.001,linecolor=black,color=bla
ck);
> end;
> pp(0.01,1);
> pp(0.032,1);
> pp(0.05,1);
> pp(-0.01,1);
Figure IVD
>
DEtools[phaseportrait]({diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=piecewise(x(t)>0.1,-85,x(t)
<-0.1,85,0)},[x(t),v(t)],t=0..1,[[x(0)=0.35,v(0)=0]],stepsize=0.001,linecolor=blac
k,color=black);
>
DEtools[phaseportrait]({diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)+v(t)=piecewise(x(t)>0.1,-85
,x(t)<-0.1,85,0)},[x(t),v(t)],t=0..1,[[x(0)=0.35,v(0)=0]],stepsize=0.001,linecolor
=black,color=black);
Figure IVE sans frottement
> pp:=proc(a,XS)
>
DEtools[phaseportrait]({diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)=piecewise(x(t)+a*v(t)>XS,-8
5,x(t)+a*v(t)<-XS,85,0)},[x(t),v(t)],t=0..1,[[x(0)=0.35,v(0)=0]],stepsize=0.001,li
necolor=black,color=black);
> end;
> pp(0.02,0.01);
Figure IVE avec frottement fluide
> pp:=proc(a,XS)
>
DEtools[phaseportrait]({diff(x(t),t)=v(t),diff(v(t),t)+v(t)=piecewise(x(t)+a*v(t)>
XS,-85,x(t)+a*v(t)<-XS,85,0)},[x(t),v(t)],t=0..1,[[x(0)=0.35,v(0)=0]],stepsize=0.0
01,linecolor=black,color=black);
> end;
> pp(0.02,0.01);
Figures VB5
> alpha:=(1/500-1/2400)*10^2.5;
>
DEtools[phaseportrait]({dv(t)=diff(v(t),t),diff(dv(t),t)+alpha*dv(t)+v(t)=0},[v(t)
,dv(t)],t=0..50,[[v(0)=1,dv(0)=0]],stepsize=0.05,linecolor=black,color=black);
> alpha1:=(1/10000-1/250)*10^2.5;alpha2:=(1/10000+1/250)*10^2.5;
>
DEtools[phaseportrait]({dv(t)=diff(v(t),t),diff(dv(t),t)+piecewise(abs(v(t))>5,alp
ha2,alpha1)*dv(t)+v(t)=0},[v(t),dv(t)],t=0..50,[[v(0)=1,dv(0)=0]],stepsize=0.05,li
necolor=black,color=black);
>
```