



DEVOIR EN CLASSE 2

EXERCICE 1

On donne les points $G(1; 2; -4)$ et $K(-3; 4; 1)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -7 - k \\ y = 6 + 2k \\ z = 6 + 5k \end{cases} k \in \mathbb{R}$$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \vec{GK}$ puis déterminer une représentation paramétrique de la droite (GK) .

$$\vec{u} = \vec{GK} = (-3 \ 4 \ 1) - (1 \ 2 \ -4) = (-4 \ 2 \ 5)$$

Une représentation paramétrique de la droite (GK) est donc

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

2. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d .

Un vecteur directeur de la droite d est $\vec{v} = (-1 \ 2 \ 5)$

3. Montrer que les droites d et (GK) sont sécantes. Préciser les coordonnées du point d'intersection M .

$$|-4 \ -1 \ 2 \ 2| = -4 \times 2 - 2 \times (-1) = -6 \neq 0$$

On en déduit que $\vec{v}$ n'est pas colinéaire à $\vec{GK}$ et donc

$$d \nparallel (GK)$$

$$M(x \ y \ z) \in d \cap (GK) \Leftrightarrow \begin{cases} -7 - k = 1 - 4t \\ 6 + 2k = 2 + 2t \\ 6 + 5k = -4 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 4t - 8 = 0 \\ 2k - 2t + 4 = 0 \\ 5k - 5t + 10 = 0 \end{cases}$$

En divisant chaque membre par 2 et 5 respectivement, on remarque que les deux dernières lignes sont équivalentes à $k - t + 2 = 0$ donc

$$M(x \ y \ z) \in d \cap (GK) \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 4t - 8 = 0 \ (L_1) \\ k - t + 2 = 0 \ (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -k + 4t - 8 = 0 \ (L_1) & \xrightarrow[3k=0]{4k-4t+8=0 \ (4L_2)} -k + 4t - 8 = 0 \ (L_1) & \xrightarrow[3t-6=0]{k-t+2=0 \ (L_2)} \end{aligned}$$

Donc

$$M(x \ y \ z) \in d \cap (GK) \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 0 \\ 3t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

On en déduit que **les droites d et (GK) sont sécantes en $M(-7 \ 6 \ 6)$.**

On considère le vecteur $\vec{w}(0 \ 15 \ -6)$

4. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? Forment-ils une base de l'espace ?

Soient des réels a , b et c tels que

$$(1) \ a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow a(-4 \ 2 \ 5) + b(-1 \ 2 \ 5) + c(0 \ 15 \ -6) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - b = 0 \\ 2a + 2b + 15c = 0 \\ 5a + 5b - 6c = 0 \end{cases}$$

Remarquons que dans les deux dernières équations

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

et

$$5a + 5b = 5(a + b)$$

sont du même signe mais $-15c$ et $6c$ sont de signes différents sauf si $c = 0$. Donc $a + b = 0$ et ainsi

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ -4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -4a - b = 0 \ (L_2) & \xrightarrow[-3a=0]{a+b=0 \ (L_3)} -4a - b = 0 \ (L_2) & \xrightarrow[3b=0]{4a+4b=0 \ (4L_3)} \end{aligned}$$

Donc

$$(1) \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Donc l'un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire des deux autres donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont **pas coplanaires** et forment une base de l'espace.

EXERCICE 2

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre. Les points I et J vérifient

$$\vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{EF} \text{ et } \vec{GJ} = \frac{2}{3}\vec{GC}$$

On veut montrer que les vecteurs $\vec{FG}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{EC}$ sont coplanaires.

1. Méthode vectorielle

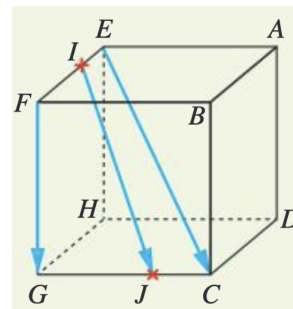
Exprimer le vecteur $3\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$. Conclure.

$$3\vec{IJ} = 3\vec{IE} + 3\vec{EF} + 3\vec{FG} + 3\vec{GJ}$$

$$3\vec{IJ} = -3 \times \frac{1}{3}\vec{EF} + 3\vec{EF} + 3\vec{FG} + 3 \times \frac{2}{3}\vec{GC} = 2(\vec{EF} + \vec{FG} + \vec{GC}) + \vec{FG}$$

$$3\vec{IJ} = 2\vec{EC} + \vec{FG}$$

Le vecteur $\vec{IJ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$ donc ces trois vecteurs sont **coplanaires**.



2. Méthode analytique

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(G, \vec{GC}, \vec{GH}, \vec{GF})$

a. Donner, sans justifier, les coordonnées des points G, C, H, F, E, I et J .

$$G(0\ 0\ 0)\ C(1\ 0\ 0)\ H(0\ 1\ 0)\ F(0\ 0\ 1)\ E(0\ 1\ 1)\ I(0\ 2/3\ 1)\ J(2/3\ 0\ 0)$$

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{IJ}$, $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$.

$$\vec{IJ} = (2/3\ 0\ 0) - (0\ 2/3\ 1) = (2/3\ -\ 2/3\ -\ 1)$$

$$\vec{EC} = (1\ 0\ 0) - (0\ 1\ 1) = (1\ -\ 1\ -\ 1)$$

$$\vec{FG} = (0\ 0\ 0) - (0\ 0\ 1) = (0\ 0\ -\ 1)$$

c. Montrer que ces vecteurs sont coplanaires.

$$\frac{2}{3}\vec{EC} + \frac{1}{3}\vec{FG} = \frac{2}{3}(1\ -\ 1\ -\ 1) + \frac{1}{3}(0\ 0\ -\ 1) = (2/3\ -\ 2/3\ -\ 1) = \vec{IJ}$$

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 3)$$

A. Étude des variations de f

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Vérifier que, pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 5x - 6)$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + 3) + e^{-x}(2x - 3) = e^{-x}(-x^2 + 3x - 3 + 2x - 3)$$

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 5x - 6)$$

3. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 5x - 6$

3. a. Résoudre l'équation $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$$

$-x^2 + 5x - 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$ et $c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1 > 0$$

$-x^2 + 5x - 6$ possède donc deux racines distinctes x_1 et x_2 qui sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{-2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{-2} = 2$$

Donc $S = \{2; 3\}$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

3. b. Trace le tableau de variations de f en justifiant les limites aux bornes. La courbe représentative C_f de la fonction f admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?

$$f(2) = e^{-2}(2^2 - 3 \times 2 + 3) = e^{-2}$$

$$f(3) = e^{-3}(3^2 - 3 \times 3 + 3) = 3e^{-3}$$

$$f(x) = -\infty \quad f(x) = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$

La courbe C_f admet donc une **asymptote horizontale** d'équation $y = 0$

3. c. Complète le tableau de valeurs puis trace la courbe représentative C_f dans le repère ci-contre.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	0,37	0,14	0,15	0,13	0,09

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une seule solution a dans R . Donne une valeur approchée de a à 0,01 près.

Remarquons que $3e^{-3} < 1$ donc, d'après le tableau de variations de la fonction f , l'équation $f(x) = 1$ ne peut pas posséder de solutions sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Sur l'intervalle $] -\infty; 2[$, la fonction f est continue en tant que produit de fonctions continues et strictement décroissante.

Par ailleurs, $1 \in f(] -\infty; 2[) =]e^{-2}; +\infty[$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \approx 0,53$ dans l'intervalle $] -\infty; 2[$ et donc dans R .

B. Recherche des points d'inflexion

5. Soit $x \in D_f$, montrer que

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 7x + 11)$$

Étudier la convexité de f et ses éventuels points d'inflexion.

La fonction f' est dérivable sur R en tant que produit de fonctions dérivables sur R . Soit $x \in R$,

$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2 + 5x - 6) + e^{-x}(-2x + 5)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 6 - 2x + 5)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 7x + 11)$$

$x^2 - 7x + 11$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -7$ et $c = 11$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 11 = 49 - 44 = 5 > 0$$

$x^2 - 7x + 11$ possède donc deux racines distinctes x_1 et x_2 qui sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$$

f'' est du signe de $x^2 - 7x + 11$ donc

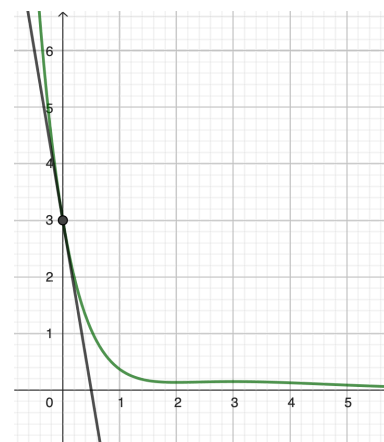
f'' change de signe en $x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$ et en $x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2}$ donc f admet deux points d'inflexion en ces points.

6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 puis la tracer dans le repère.

L'équation de la tangente à la courbe de f en 0 est donnée par

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = -6x + 3$$



x	$-\infty$	$\frac{7-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{7+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
f	<i>convexe</i>	<i>concave</i>	<i>convexe</i>		