

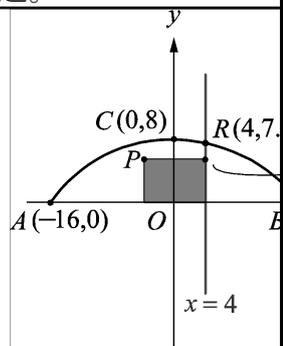
泰宇出版
第28期

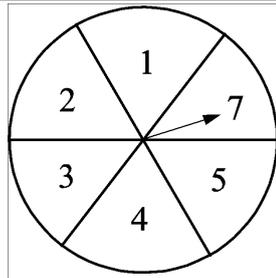
數學科領域
技術型高級中等學校

素養試題超展開

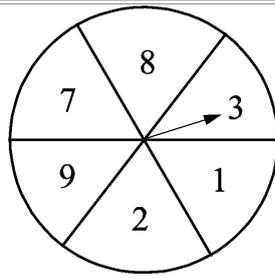
第二冊、第四冊 數學A、數學B、數學C
112下學期第二次段考使用

素養題命題實例			
題目	<p>某國政府為了開發古城旅遊觀光，決定在護城河上建一座圓形拱橋，已知河面寬度 \overline{AB} 為32公尺，拱橋頂點C離河面8公尺，則：</p> <p>(1)如果以河面寬度 \overline{AB} 所在的直線為x軸，再以 \overline{AB} 的中垂線為y軸，建立如圖的直角坐標系，試求出該圓形拱橋所在的圓之方程式。</p> <p>(2)現有一遊船，船寬8公尺，船頂離水面7公尺，為了保證安全，要求行船頂部與拱橋頂部的垂直方向高度至少要差0.5公尺，那麼這條船可以順利通過這座拱橋嗎？(請列式說明，數值可取到小數點後第三位)</p>		
答案	<p>(1) $x^2 + (y+12)^2 = 400$</p> <p>(2) 船頂部與拱橋頂部的垂直方向高度為0.596公尺，故船可順利通過。</p>		
解析	<p>(1)</p> <p>由圖中可知 $B(16,0)$、$C(0,8)$， 設圓心為 $(0,k)$，圓半徑為 r， 則圓方程式為 $x^2 + (y-k)^2 = r^2$， $\therefore B(16,0)$、$C(0,8)$ 都在圓上，</p> $\begin{cases} 16^2 + (0-k)^2 = r^2 \\ 0^2 + (8-k)^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 256 + k^2 = r^2 \quad \text{①} \\ 64 - 16k + k^2 = r^2 \quad \text{②} \end{cases}$ <p>① - ② $\Rightarrow 192 + 16k = 0$，$k = -12$ 代回①得 $r = 20$， \therefore 圓方程式為 $x^2 + (y+12)^2 = 400$。</p> <p>(2)</p> <p>設船的右上表坐標 Q 為 $(4,7)$，令 $x = 4$ 與圓的交點為 R， 即 R 點坐標為 $(4, \sqrt{384} - 12) \approx (4, 7.596)$， R 點與 Q 點的距離為 $7.596 - 7 = 0.596 > 0.5$，故船可順利通過。</p>		
範圍	技高數A 第二冊 圓與直線的關係 圓的定義與方程式	難度	易 <input type="checkbox"/> 中 <input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/>
學習內容	S-10-2圓方程式。	學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-3 問題的解決
素養題命題實例			
題目	<p>如圖，在兩個圓盤中，指針落在其所在圓盤的各個數字區域之機率均為 $\frac{1}{6}$，那麼兩個指針至少有一個落在奇數區域的機率是多少？</p>		





第一個圓盤



第二個圓盤

答案

$$\frac{8}{9}$$

解析

第一個圓盤中：指針落在偶數區域有2、4兩種情況，其機率為 $\frac{2}{6}$ ；

第二個圓盤中：指針落在偶數區域有2、8兩種情況，其機率為 $\frac{2}{6}$ 。

\therefore 兩個指針皆落在偶數區域的機率為 $\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ 。

兩個指針至少有一個落在奇數區域的機率

$$= 1 - \square \square$$

$$= 1 - \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$$

$$= 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}。$$

範圍

技高數A 第四冊 機率 機率的運算

難度

易 中 難

學習
內容

D-11-6 機率的運算。

學習
表現

1-V-1 概念的了解
1-V-4 連結與應用

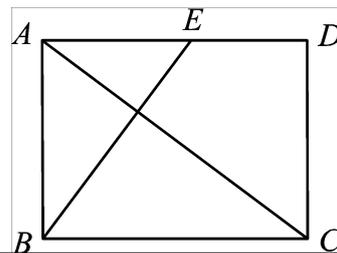
素養題命題實例

題目

在中國，畢氏定理又稱作「勾股定理」或「商高定理」，「勾長」及「股長」分別指的是直角三角形兩條直角邊長度，斜邊則稱「弦」，其中「勾三股四弦五」是畢氏定理的一個特例。根據記載，西周時期的數學家商高曾經和周公討論過「勾三股四弦五」的問題。如圖，在矩形

$ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 滿足「勾三股四弦五」且 $\overline{AB} = 3$ ，

E 為 \overline{AD} 上一點， $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ，若 $\overline{BE} = \lambda \overline{BA} + \mu \overline{BC}$ ，則 $\lambda + \mu$ 的值為何？



答案

$$\frac{25}{16}$$

解析

將圖形坐標化，如圖所示，

$$\because \overline{AB} = 3, \overline{BC} = 4,$$

$$\text{則 } B(0,0), A(0,3), C(4,0),$$

$$\text{設 } E(k,3) \because \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{BE} \cdot \overline{AC} = 0$$

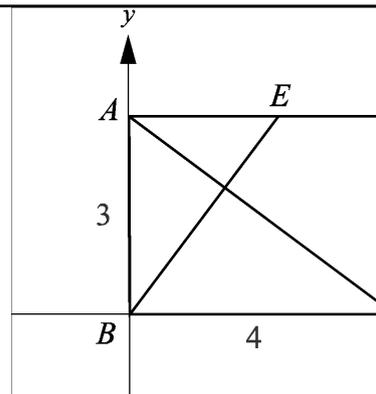
$$\Rightarrow (k,3) \cdot (4,-3) = 0$$

$$\Rightarrow 4k - 9 = 0, \quad k = \frac{9}{4},$$

$$\therefore E\left(\frac{9}{4}, 3\right).$$

$$\text{若 } \overline{BE} = \lambda \overline{BA} + \mu \overline{BC} \Rightarrow \left(\frac{9}{4}, 3\right) = \lambda(0,3) + \mu(4,0) = (4\mu, 3\lambda) \Rightarrow \begin{cases} 4\mu = \frac{9}{4} \\ 3\lambda = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \mu = \frac{9}{16}, \lambda = 1 \Rightarrow \lambda + \mu = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}.$$



範圍

技高數B 第二冊 向量 向量的內積與夾角
技高數B乙版 第二冊 平面向量 向量的內積與夾角

難度

易 中 難

學習內容

N-10-10向量的坐標表示法。
N-10-11向量的內積

學習表現

1-V-1 概念的了解。
1-V-4 連結與應用。

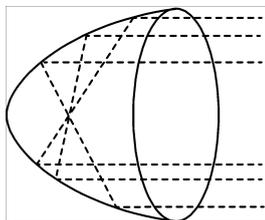
素養題命題實例			
題目	臺南有很多名勝古蹟，像一級古蹟就有七座，某老師為了鼓勵學生表現優秀，準備出資要讓其中的五名優秀學生到四個古蹟「赤崁樓」、「億載金城」、「安平古堡」、「大天后宮」去旅遊。若規定每人限到一處旅遊，且這四個古蹟中，每個古蹟至少安排一人，則這五名學生共有幾種安排方法？		
答案	240種		
解析	<p>先將人數分組成 (2,1,1,1)，分組後再分配至四個項目</p> $\Rightarrow \frac{C_2^5 \times C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^1}{3!} \times 4! = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1}{3!} \times 4! = 60 \times 4 = 240$ <p>總共有240種安排方法。</p>		
範圍	技高數B 第四冊 排列組合 組合 技高數B乙版 第四冊 排列組合 組合	難度	易■ 中□ 難□
學習內容	D-11-4組合。	學習表現	1-V-1 概念的了解。 1-V-4 連結與應用。

素養題命題實例			
題目	十二平均律 (Twelve Tone Temperament) 是通用的音律體系, 發明者為 <u>中國明代朱載堉</u> (1536~1611年), 他最早用數學方法計算出半音比例, 為這個理論的發展做出重要的貢獻。十二平均律將一個純八度分成頻率比相等的十二個半音, 依次得到十三個半音, 從第二個半音起, 每一個半音的頻率與它的前一個半音的頻率之比都為 $\sqrt[12]{2}$, 若第一個半音的頻率為 f , 則第八個半音頻率為何?		
答案	$\sqrt[12]{2^7} f$ (或可寫成 $2^{\frac{7}{12}} f$)		
解析	<p>\because 每一個半音的頻率與它的前一個半音的頻率之比都為 $\sqrt[12]{2}$,</p> <p>\therefore 此十三個半音頻率, 呈現等比數列, 公比 $r = \sqrt[12]{2}$,</p> <p>設第一個半音頻率 $a_1 = f$, 則第八個半音頻率 $a_8 = a_1 \times r^7 = f \times (\sqrt[12]{2})^7 = \sqrt[12]{2^7} f$。</p>		
範圍	技高數C 第二冊 數列與級數 等比數列與等比級數	難度	易 <input type="checkbox"/> 中 <input checked="" type="checkbox"/> 難 <input type="checkbox"/>
學習內容	N-10-5等比數列與等比級數。	學習表現	1-V-1 概念的了解。 1-V-4 連結與應用。

素養題命題實例

題目

如圖，探照燈反射器的軸截面是拋物線的一部分，光源位於拋物線的焦點處，已知燈口圓的直徑為60公分，燈深40公分，求此拋物線的標準方程式及焦點坐標。



答案

拋物線的標準方程式為 $y^2 = \frac{45}{2}x$; 焦點坐標 $F = (\frac{45}{8}, 0)$

解析

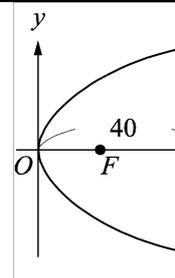
如圖，將探照燈的軸截面坐標化，其中探照燈的頂點與原點重合、燈口直徑與x軸垂直，

令拋物線方程式為 $y^2 = 4cx$,

其中 $A(40, 30)$ 在拋物線上 $\Rightarrow 30^2 = 4 \times c \times 40 \Rightarrow c = \frac{45}{8}$,

\therefore 拋物線的標準方程式為 $y^2 = 4cx = 4 \times \frac{45}{8} \times x = \frac{45}{2}x$,

焦點坐標 $F = (c, 0) = (\frac{45}{8}, 0)$ 。



範圍

技高數C 第四冊 二次曲線 拋物線

難度

易 中 難

學習內容

S-11-6拋物線。

學習表現

1-V-2程序的執行
1-V-4連結與應用