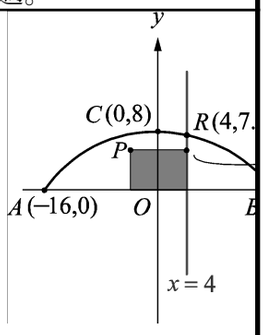
泰宇出版
第28期

數學科領域
技術型高級中等學校

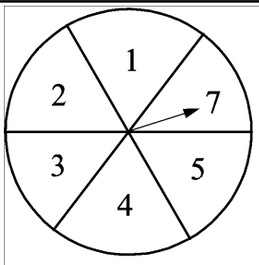
素養試題超展開

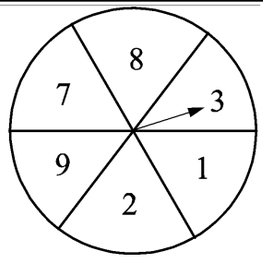
第二冊、第四冊 數學A、數學B、數學C
112下學期第二次段考使用

素養題命題實例	
題目	某國政府為了開發古城旅遊觀光，決定在護城河上建一座圓形拱橋，已知河面寬度 $\overline{AB}$ 為32公尺，拱橋頂點C離河面8公尺，則： (1)如果以河面寬度 $\overline{AB}$ 所在的直線為x軸，再以 $\overline{AB}$ 的中垂線為y軸，建立如圖的直角坐標系，試求出該圓形拱橋所在的圓之方程式。 (2)現有一遊船，船寬8公尺，船頂離水面7公尺，為了保證安全，要求行船頂部與拱橋頂部的垂直方向高度至少要差0.5公尺，那麼這條船可以順利通過這座拱橋嗎？（請列式說明，數值可取到小數點後第三位） 
答案	(1) $x^2+(y+12)^2=400$ (2) 船頂部與拱橋頂部的垂直方向高度為0.596公尺，故船可順利通過。
解析	(1) 由圖中可知 $B(16,0)$ 、$C(0,8)$， 設圓心為 $(0,k)$，圓半徑為r， 則圓方程式為 $x^2+(y-k)^2=r^2$， $\because$ $B(16,0)$ 、$C(0,8)$ 都在圓上， 可列出 $\begin{cases}16^2+(0-k)^2=r^2\\0^2+(8-k)^2=r^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}256+k^2=r^2\ \cdots①\\64-16k+k^2=r^2\ \cdots②\end{cases}$ ①－② $\Rightarrow 192+16k=0$，$k=-12$ 代回①得 $r=20$， $\therefore$圓方程式為 $x^2+(y+12)^2=400$。  (2) 設船的右上表坐標Q為 $(4,7)$，令 $x=4$ 與圓的交點為R， 即R點坐標為 $(4,\sqrt{384}-12)\approx(4,7.596)$， R點與Q點的距離為 $7.596-7=0.596>0.5$，故船可順利通過。

範圍	**技高數A 第二冊 圓與直線的關係 圓的定義與方程式**	難度	易□ 中■ 難□
學習內容	S-10-2**圓方程式**。	學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-3 問題的解決

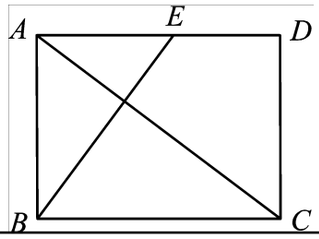
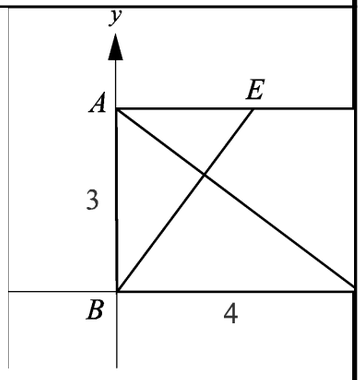
素養題命題實例	
題目	如圖，在兩個圓盤中，指針落在其所在圓盤的各個數字區域之機率均為 $\frac{1}{6}$，那麼兩個指針至少有一個落在奇數區域的機率是多少？

<table>
<tr><td></td><td>

第一個圓盤


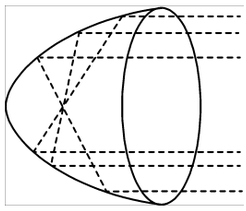
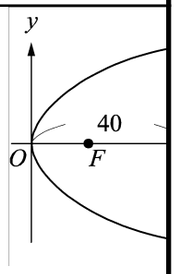
第二個圓盤</td></tr>
<tr><td>答案</td><td>$\frac{8}{9}$</td></tr>
<tr><td>解析</td><td>第一個圓盤中:指針落在偶數區域有2、4兩種情況，其機率為 $\frac{2}{6}$；
第二個圓盤中:指針落在偶數區域有2、8兩種情況，其機率為 $\frac{2}{6}$。
∴兩個指針皆落在偶數區域的機率為 $\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$。
兩個指針至少有一個落在奇數區域的機率
$=1-$ □ □
$=1-\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}$
$=1-\frac{4}{36}=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$。</td></tr>
</table>

範圍	技高數A 第四冊 機率 機率的運算	難度	易■ 中□ 難□
學習內容	D-11-6機率的運算。	學習表現	1-V-1 概念的了解 1-V-4 連結與應用

素養題命題實例			
題目	在中國，畢氏定理又稱作「勾股定理」或「商高定理」，「勾長」及「股長」分別指的是直角三角形兩條直角邊長度，斜邊則稱「弦」，其中「勾三股四弦五」是畢氏定理的一個特例。根據記載，西周時期的數學家商高曾經和周公討論過「勾三股四弦五」的問題。如圖，在矩形 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 滿足「勾三股四弦五」且 $\overline{AB}=3$，E 為 $\overline{AD}$ 上一點，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，若 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$，則 $\lambda+\mu$ 的值為何？  		
答案	$\frac{25}{16}$		
解析	將圖形坐標化，如圖所示， $\because \overline{AB}=3$、$\overline{BC}=4$， 則 $B(0,0)$、$A(0,3)$、$C(4,0)$， 設 $E(k,3)$ $\because \overline{BE}\perp\overline{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\Rightarrow (k,3)\cdot(4,-3)=0$ $\Rightarrow 4k-9=0$，$k=\frac{9}{4}$， $\therefore E(\frac{9}{4},3)$。  若 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC} \Rightarrow (\frac{9}{4},3)=\lambda(0,3)+\mu(4,0)=(4\mu,3\lambda) \Rightarrow \begin{cases}4\mu=\frac{9}{4}\\3\lambda=3\end{cases}$， $\therefore \mu=\frac{9}{16}$，$\lambda=1 \Rightarrow \lambda+\mu=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$。		
範圍	技高數B 第二冊 向量 向量的內積與夾角 技高數B乙版 第二冊 平面向量 向量的內積與夾角	難度	易□ 中□ 難■
學習內容	N-10-10向量的坐標表示法。 N-10-11向量的內積	學習表現	1-V-1 概念的了解。 1-V-4 連結與應用。

<table>
<tr><td colspan="4">素養題命題實例</td></tr>
<tr><td>題目</td><td colspan="3">臺南有很多名勝古蹟，像一級古蹟就有七座，某老師為了鼓勵學生表現優秀，準備出資要讓其中的五名優秀學生到四個古蹟「赤崁樓」、「億載金城」、「安平古堡」、「大天后宮」去旅遊。若規定每人限到一處旅遊，且這四個古蹟中，每個古蹟至少安排一人，則這五名學生共有幾種安排方法？</td></tr>
<tr><td>答案</td><td colspan="3">240種</td></tr>
<tr><td>解析</td><td colspan="3">先將人數分組成 $(2,1,1,1)$，分組後再分配至四個項目
$\Rightarrow \frac{C_2^5 \times C_1^3 \times C_1^2 \times C_1^1}{3!} \times 4! = \frac{\frac{5\times 4}{2\times 1} \times 3 \times 2 \times 1}{3!} \times 4! = 60 \times 4 = 240$，
總共有240種安排方法。</td></tr>
<tr><td>範圍</td><td>技高數B 第四冊 排列組合 組合
技高數B乙版 第四冊 排列組合 組合</td><td>難度</td><td>易■ 中□ 難□</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>D-11-4組合。</td><td>學習表現</td><td>1-V-1 概念的了解。
1-V-4 連結與應用。</td></tr>
</table>

素養題命題實例			
題目	十二平均律(Twelve Tone Temperament)是通用的音律體系，發明者為中國明代朱載堉(1536～1611年)，他最早用數學方法計算出半音比例，為這個理論的發展做出重要的貢獻。十二平均律將一個純八度分成頻率比相等的十二個半音，依次得到十三個半音，從第二個半音起，每一個半音的頻率與它的前一個半音的頻率之比都為 $\sqrt[12]{2}$ ，若第一個半音的頻率為f，則第八個半音頻率為何？		
答案	$\sqrt[12]{2^7}f$ （**或可寫成** $2^{\frac{7}{12}}f$ ）		
解析	∵每一個半音的頻率與它的前一個半音的頻率之比都為 $\sqrt[12]{2}$ ， ∴此十三個半音頻率，呈現等比數列，公比 $r=\sqrt[12]{2}$ ， 設第一個半音頻率 $a_1=f$ ，則第八個半音頻率 $a_8=a_1\times r^7=f\times(\sqrt[12]{2})^7=\sqrt[12]{2^7}f$ 。		
範圍	技高數C 第二冊 數列與級數 等比數列與等比級數	難度	易□ 中■ 難□
學習內容	N-10-5等比數列與等比級數。	學習表現	1-V-1 概念的了解。 1-V-4 連結與應用。

<table>
<tr><td colspan="4">素養題命題實例</td></tr>
<tr><td>題目</td><td colspan="3">如圖，探照燈反射器的軸截面是拋物線的一部分，光源位於拋物線的焦點處，已知燈口圓的直徑為60公分，燈深40公分，求此拋物線的標準方程式及焦點坐標。
</td></tr>
<tr><td>答案</td><td colspan="3">拋物線的標準方程式為 $y^2=\frac{45}{2}x$ ；焦點坐標 $F=(\frac{45}{8},0)$</td></tr>
<tr><td>解析</td><td colspan="3">如圖，將探照燈的軸截面坐標化，
其中探照燈的頂點與原點重合、燈口直徑與x軸垂直，
令拋物線方程式為 $y^2=4cx$ ，
其中 $A(40,30)$ 在拋物線上 $\Rightarrow 30^2=4\times c\times 40\Rightarrow c=\frac{45}{8}$ ，
$\therefore$拋物線的標準方程式為 $y^2=4cx=4\times\frac{45}{8}\times x=\frac{45}{2}x$ ，
焦點坐標 $F=(c,0)=(\frac{45}{8},0)$ 。
</td></tr>
<tr><td>範圍</td><td>技高數C 第四冊 二次曲線 拋物線</td><td>難度</td><td>易□ 中■ 難□</td></tr>
<tr><td>學習內容</td><td>S-11-6拋物線。</td><td>學習表現</td><td>1-V-2程序的執行
1-V-4連結與應用</td></tr>
</table>