

Première partie
Accélérateur électrostatique

1. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit $\frac{1}{2}mv_A^2 + eV_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + eV_B$ d'où :

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2e \frac{U_{AB}}{m}}$$

Application numérique : v_B vaut $11,9 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ pour un proton et $1,02 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ pour un ion césium 137.

2. Le raisonnement de la question précédente ne faisant pas intervenir la forme des armatures, le résultat n'en dépend pas.

3.a) On commence par supposer la diode passante. Elle se comporte alors comme un court-circuit (diodé idéale) et la charge de l'armature supérieure du condensateur est $Q = CU_C(t) = CU(t) = CU_0 \sin \omega t$.

L'intensité qui traverse (de gauche à droite) la diode est dans ce cas $i = \frac{dQ}{dt} = C\omega U_0 \cos \omega t$. La diode reste effectivement passante tant que i est positive donc pendant le premier quart de période. Ensuite, elle se bloque donc la charge du condensateur reste constante (CU_0). U_C est à partir de ce moment là constamment égale à U_0 et donc supérieure (ou égale) à $U(t)$: la diode ne redevient jamais passante.

3.b) La tension aux bornes de la diode est, en valeur absolue, $|U(t) - U_C(t)| = U_0(1 - \sin \omega t)$ (après le premier quart de période) dont la valeur maximale est $2U_0$.

4.a) $i = \frac{dQ}{dt} \quad i' = \frac{dQ'}{dt}$

4.b) La diode D impose que i soit positive ou nulle donc (d'après 4.a) Q est une fonction croissante du temps qui, étant nulle initialement, ne peut qu'être positive ensuite.

4.c) Si D est passante, elle se comporte comme un court-circuit. Alors, (loi des mailles) U est la somme des tensions aux bornes des condensateurs. $U = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C}$. Par ailleurs, $V_M - V_N = U_C(t) = -\frac{Q}{C}$ est négatif d'après 4.b et la diode D' est donc bloquée lorsque D est passante.

Remarque : de façon analogue, si D' est passante, V_M et V_N sont identiques, la tension est positive et donc la diode D est bloquée.

4.d) On se place à une date où $U(t)$ décroît. Si D' était passante, on aurait $U(t) = \frac{Q'}{C'}$ donc Q' serait décroissante et D serait bloquée d'après la remarque précédente. Le courant i' devrait donc passer dans la diode D' et être négatif ce qui est absurde. Donc D' est bloquée lorsque $U(t)$ décroît. Alors i et i' sont opposées et $Q + Q'$ reste constante.

4.e) On se place à une date où $U(t)$ croît. Si D était passante, d'après 4.c $U = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C}$ et D' serait bloquée donc, de façon analogue au 4.d, on aurait $Q + Q' = Cte$. D'où $U = \frac{Cte}{C'} - Q \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)$. Le signe moins introduit

ici une contradiction puisque $Q(t)$ (voir 4.b) et $U(t)$ sont croissants. Donc D est bloquée lorsque $U(t)$ croît et, en conséquence, $Q(t)$ reste constante.

5. La diode D' devient passante lorsque $U(t)$ tend à dépasser la tension aux bornes de C'. Cela se produit avant que U n'atteigne son maximum U_0 si Q' est toujours inférieure à $C'U_0$ (hypothèse 1).

5.a) Pendant que U croît, D est bloquée (4.e) et la situation est donc équivalente à celle de la question 3. La tension aux bornes de C' suit, lorsque D' est passante, $U(t)$ et atteint donc en même temps qu'elle la valeur maximale U_0 associée à $Q'_{\max} = C'U_0$. Pendant ce temps, D étant bloquée, la charge Q est constante (notée en accord avec l'énoncé Q_{n-1}).

5.b) À partir du moment où $U(t)$ a atteint son maximum, U doit décroître donc (d'après 4.d) $Q + Q' = Cte = C'U_0 + Q_{n-1}$ et D' est bloquée. Tant que D aussi est bloquée, la tension aux bornes de D est

$V_M - V_B = U(t) - U_0 + \frac{Q_{n-1}}{C}$. Ceci peut s'annuler et la diode D devenir passante avant le minimum de $U(t)$ si Q_{n-1} est inférieur à $2CU_0$ (hypothèse 2). Alors, d'après 4.c,

$U = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C}$ et, en se plaçant au minimum de $U(t)$,
 $-U_0 = \frac{Q'}{C'} - \frac{Q}{C}$. On peut éliminer Q' en combinant ceci avec $Q + Q' = C'U_0 + Q_{n-1}$ pour obtenir

$$Q_n \left(1 + \frac{C'}{C} \right) = 2C'U_0 + Q_{n-1}$$

5.c) La limite éventuelle Q_∞ de la suite s'obtient en remplaçant Q_n et Q_{n-1} par Q_∞ dans l'équation précédente. On trouve $Q_\infty = 2CU_0$. La suite de terme général $Q_n - Q_\infty$ est alors une suite géométrique de

raison $\frac{1}{1 + \frac{C'}{C}} < 1$ donc converge vers 0 (en gardant un signe constant) et Q_n tend bien vers Q_∞ . La tension aux bornes de C tend donc vers $2U_0$.

Remarques : L'hypothèse 2 est vérifiée grâce au signe constant (<0) de $Q_n - Q_\infty$.
 L'hypothèse 1 est vérifiée car $Q(t)$ est croissante donc $Q_n > Q_{n-1}$. Alors, au moment où $U(t)$ atteint son minimum, $Q' = C'U_0 + Q_{n-1} - Q_n$ est effectivement inférieur à $C'U_0$ (mais Q' tend vers cette dernière valeur lorsque $t \rightarrow \infty$ et donc la tension aux bornes de C' tend vers U_0).

5.d) La tension aux bornes de D' est (en régime asymptotique) nulle lorsque U est maximale et maximale (valeur $2U_0$) lorsque U est minimale. Pour D, c'est le contraire, la tension est nulle lorsque U est minimale et vaut $2U_0$ lorsque U est maximale.

Ce dispositif est une « pompe à diodes ». Il permet d'obtenir aux bornes de C une tension double de celle qu'on obtenait à la question 3. sans imposer aux bornes des diodes de contraintes plus importantes. On peut généraliser avec un montage comportant non pas 2 mais n cellules (D,C) et obtenir ainsi une tension nU_0 en sortie d'un dispositif alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude U_0 .

Deuxième partie

Accélération par une tension alternative

1. On suppose la fréquence suffisamment basse pour pouvoir raisonner comme en électrostatique (approximation des régimes quasi-stationnaires). Chaque tube est une cavité dont la paroi est équipotentielle, et ne contenant pas de charges, à condition bien sûr de négliger l'influence du faisceau de particules lui-même. Le potentiel V ne pouvant posséder d'extremum, toute la cavité est donc équipotentielle, ce qui implique la nullité du champ électrique, et donc de l'accélération.

2. À un instant donné, la différence de potentiel entre le tube $n + 1$ et le tube n est l'opposé de celle entre le tube n et le tube $n - 1$. Si l'on souhaite que la particule subisse à chaque fois la même différence de potentiel accélératrice (condition de synchronisme), il suffit donc qu'une demi-période se soit écoulée, c'est-à-dire :

$$t_{n+1} - t_n = T / 2 = \pi / \omega$$

3.a) Supposons, pour fixer les idées, que les tubes de rang pair sont au potentiel 0 et les tubes de rang impair au potentiel $U(t)$.

Si n est pair, $V(t_{n+1}) = U(t_{n+1})$ et $V(t'_n) = 0$ donc $\delta V_n = U(t_{n+1})$.

Si n est impair, $V(t_{n+1}) = 0$ et $V(t'_n) = U(t'_n)$ donc $\delta V_n = -U(t'_n)$.

3.b) On considère que $t'_n \cong t_{n+1}$. La condition de synchronisme étant réalisée, $\omega t_{n+1} = \omega t_0 + (n+1)\pi$.

Si n est pair, $\delta V_n = U(t_{n+1}) = U_0 \sin[\phi_0 + (n+1)\pi] = -U_0 \sin \phi_0$.

Si n est impair, $\delta V_n = -U(t'_n) = -U(t_{n+1}) = -U_0 \sin[\phi_0 + (n+1)\pi] = -U_0 \sin \phi_0$.

Pour accélérer des particules chargées positivement, il faut que $\delta V_n < 0$, donc : $0 < \phi_0 < \pi$.

3.c) Comme au 1. de la première partie, le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2eU_0 \sin \phi_0}{m}$$

et on obtient immédiatement par récurrence :

$$v_n^2 = v_0^2 + n \frac{2eU_0 \sin \phi_0}{m}$$

Pour que la condition de synchronisme soit respectée, il faut que $L_n / v_n = \pi / \omega$, soit :

$$L_n = \frac{\pi}{\omega} \sqrt{v_0^2 + n \frac{2eU_0 \sin \phi_0}{m}}$$

4.a)
$$L_0 = \frac{\pi v_0}{\omega} = \frac{v_0}{2f} \cong 5,1 \text{ cm}$$

4.b) L'énergie a doublé si $v_n^2 \geq 2v_0^2$, ce qui donne
$$n \geq \frac{mv_0^2}{2eU_0 \sin \phi_0} = \frac{U_{AB}}{U_0 \sin \phi_0} \cong 8,7$$

Il faut donc au moins 9 phases accélératrices, soit 10 tubes, pour doubler l'énergie.

Si on considère que $v_9 \cong v_0 \sqrt{2}$, alors $L_9 \cong L_0 \sqrt{2} \cong 1,4 L_0$: on peut estimer que la longueur moyenne de chaque tube est de l'ordre de 1,2 fois celle du premier, et donc la longueur totale 12 fois, soit 61 cm. Le calcul complet donne d'ailleurs :

$$\sum_{n=0}^9 L_n = L_0 \sum_{n=0}^9 \sqrt{1 + n \frac{U_0 \sin \phi_0}{U_{AB}}} \cong 12,25 L_0 \cong 62 \text{ cm}$$

4.c) La condition de synchronisme est réalisée si les vitesses successives sont les mêmes pour l'ion de masse m et l'ion de masse m' . Seul le rapport $\sin \phi_0 / m$ intervenant dans l'expression de L_n , la condition est :

$$\frac{\sin \alpha_0}{m'} = \frac{\sin \phi_0}{m}$$

α_0 n'existe que si $m' \leq m / \sin \phi_0$, d'où un nombre de masse maximum :
$$\frac{137}{\sin(\pi/3)} = 158,2 \Rightarrow A_{\max} = 158$$

5. Deux cas sont à envisager :

Premier cas : $\phi_0 < \pi / 2$

Dans ces conditions, $|\delta V_n|$ est une fonction croissante de ϕ_0 , donc de τ_0 . Si la particule entre légèrement en retard ($\tau_0 > t_0$), $|\delta V_n|$ sera supérieur à sa valeur « normale » et la particule aura tendance à combler son retard. Si la particule entre légèrement en avance ($\tau_0 < t_0$), $|\delta V_n|$ sera inférieur à sa valeur « normale » et la particule aura tendance à perdre son avance.

Deuxième cas : $\phi_0 > \pi / 2$

Dans ces conditions, $|\delta V_n|$ est une fonction décroissante de ϕ_0 , donc de τ_0 . Les conclusions précédentes sont inversées : si la particule entre en retard, son retard s'aggrave, et si elle entre en avance, son avance s'accentue.

En résumé, le synchronisme est stable si $0 < \phi_0 < \pi/2$.

Si on injecte à l'entrée de l'appareil un faisceau continu, les particules pour lesquelles le synchronisme est stable vont se regrouper par « paquets » et seront effectivement accélérées. Les autres auront un comportement chaotique, et en moyenne ne seront pas accélérées.

6.a) On a établi au **3.c)** que
$$v_n^2 = v_0^2 \left(1 + n \frac{2eU_0 \sin \phi_0}{mv_0^2} \right)$$
. On en déduit l'expression approchée au premier ordre :
$$v_n \cong v_0 \left(1 + n \frac{eU_0 \sin \phi_0}{mv_0^2} \right), \quad v_{n+1} - v_n \cong \frac{eU_0 \sin \phi_0}{mv_0}.$$

6.b) Si la particule était synchrone, on aurait : $\tau_n = t_0 + n\pi/\omega$, et par conséquent $\alpha_n = \phi_0 \quad \forall n$. Appliquons à nouveau le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{m}{2}(w_{n+1}^2 - w_n^2) = (-1)^{n+1} eU_0 \sin(\omega\tau_{n+1}) = (-1)^{n+1} eU_0 \sin[\alpha_{n+1} + (n+1)\pi] = eU_0 \sin(\alpha_{n+1})$$

Or on peut écrire : $w_{n+1}^2 - w_n^2 = (w_{n+1} + w_n)(w_{n+1} - w_n) \cong 2v_0(w_{n+1} - w_n)$ au premier ordre, d'où finalement :

$$w_{n+1} - w_n \cong \frac{eU_0}{mv_0} \sin \alpha_{n+1}$$

6.c) La relation précédente s'écrit encore :
$$v_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - v_n - \varepsilon_n = \frac{eU_0}{mv_0} \sin \alpha_{n+1},$$
 soit en utilisant le **6.a** :

$$\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \frac{eU_0}{mv_0} (\sin \alpha_{n+1} - \sin \phi_0)$$

6.d) La longueur du tube n vaut $L_n = v_n \frac{\pi}{\omega}$, donc $\tau_{n+1} = \tau_n + \frac{L_n}{w_n} = \tau_n + \frac{v_n}{w_n} \frac{\pi}{\omega}$ et en multipliant par ω :

$$\alpha_{n+1} + (n+1)\pi - \alpha_n - n\pi = \frac{\pi}{1 + \frac{\varepsilon_n}{v_n}} \cong \frac{\pi}{1 + \frac{\varepsilon_n}{v_0}} \cong \pi \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{v_0} \right),$$

, ce qui conduit bien à :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n \cong -\frac{\pi \varepsilon_n}{v_0}$$

6.e) Les deux équations différentielles vérifiées par $\varepsilon(n)$ et $\alpha(n)$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon}{dn} = \frac{eU_0}{mv_0} [\sin \alpha(n) - \sin \phi_0] \\ \frac{d\alpha}{dn} = -\frac{\pi}{v_0} \varepsilon(n) \end{cases}$$

On dérive la seconde par rapport à n pour éliminer ε et il vient :

$$\frac{d^2\alpha}{dn^2} = -\frac{\pi eU_0}{mv_0^2} (\sin \alpha - \sin \phi_0)$$

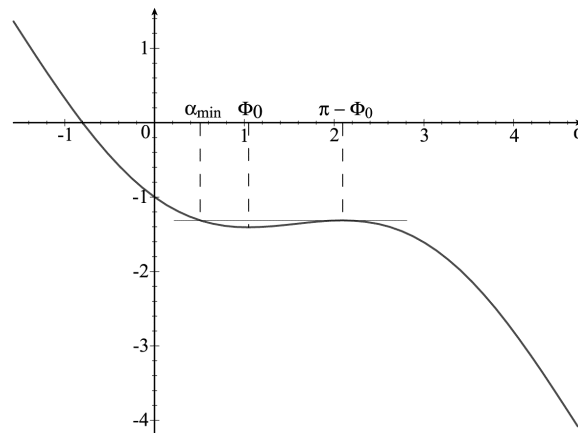
Les conditions « initiales » sont :
$$\begin{cases} \alpha(0) = \omega_0 \tau_0 = \alpha_0 \\ \alpha'(0) = -\pi \varepsilon(0)/v_0 = 0 \end{cases}$$

6.f) En adoptant la même masse m pour la particule fictive, on peut écrire :

$$m \frac{d^2\alpha}{dn^2} = -\frac{\pi eU_0}{v_0^2} (\sin \alpha - \sin \phi_0) = -\frac{dW(\alpha)}{d\alpha} \quad d'où \text{ en intégrant : } \quad W(\alpha) = \frac{\pi eU_0}{v_0^2} (-\cos \alpha - \alpha \sin \phi_0)$$

Les extrema de $W(\alpha)$ ont lieu pour $\sin \alpha = \sin \phi_0$ soit $\begin{cases} \alpha = \phi_0 & [2\pi] \\ \alpha = \pi - \phi_0 & [2\pi] \end{cases}$

Voici le graphe de la fonction : $W(\alpha) = -\cos \alpha - \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$



6.g) On observera des oscillations de α autour de la phase synchrone ϕ_0 si α reste dans la cuvette de potentiel limitée par $\alpha_{\min}$ et $\pi - \phi_0 = 2\pi/3$ (voir le graphe ci-dessus). On obtient graphiquement $\alpha_{\min} \approx 0,5$ (une résolution numérique donne la valeur 0,508). Compte tenu du fait que $\alpha'(0)$ est nul, il suffit que α_0 soit situé dans la cuvette pour que α y reste.

Troisième partie Accélération dans un circuit résonant

1. La symétrie des courants, donc l'antisymétrie du champ magnétique par rapport à tout plan contenant l'axe Oz impose que le champ magnétique soit orthoradial.

2. L'invariance par rotation autour de Oz impose que la composante orthoradiale du champ ne dépende que de z et de la distance à l'axe et l'application du théorème d'Ampère à un cercle d'axe Oz donne la valeur du champ dans la cavité

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} e_\theta \quad (B \text{ est nul hors de la cavité})$$

3. L'énergie magnétique vaut $W_m = \iiint_{\text{volume}} \frac{B^2}{2\mu_0} dV$. En prenant un volume élémentaire $2\pi r l dr$ (B ne

dépend que de r) on obtient $W_m = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} i^2$ qui, par identification avec $\frac{1}{2} Li^2$, conduit à $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 1,38 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Application numérique :

4. Pour le condensateur plan étudié (effets de bord négligés) $C = \epsilon_0 \frac{\pi R_1^2}{g}$.

Application numérique : $C = 4,42 \text{ pF}$

5. $LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \sqrt{\frac{g}{2\pi^2 \epsilon_0 \mu_0 R_1^2 l \ln R_2/R_1}}$ Application numérique : $\frac{\omega_0}{2\pi} = 204 \text{ MHz}$

6. $\lambda_0 = 1,5 \text{ m}$ n'est pas assez grande (devant l) pour que l'approximation des régimes quasi-stationnaires soit bonne ici.

7. Pour un régime sinusoïdal de pulsation ω_0 où $Q = CU_0 \sin \omega_0 t$ et où $i = \frac{dQ}{dt} = CU_0 \omega_0 \cos \omega_0 t$,

l'énergie totale vaut $W = \frac{1}{2} \left(Li^2 + \frac{Q^2}{C} \right) = \frac{1}{2} CU_0^2$. Le facteur de qualité est alors :

$$Q = \frac{1}{2} \frac{CU_0^2}{P} \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{P} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Application numérique : $Q = 5700$ (valeur très importante donc résonance aiguë)

8. Une particule sera synchrone si sa durée de traversée d'un tube est un multiple de la période des oscillations du champ (on suppose le champ sinusoïdal à la pulsation ω_0).

$$v \frac{2\pi}{\omega_0} n = l \Rightarrow v = \frac{1}{n} \frac{l \omega_0}{2\pi} \quad (n \text{ entier})$$

Application numérique : $v = \frac{8,1 \cdot 10^7}{n} \text{ m.s}^{-1} = \frac{0,27}{n} c$. L'approximation newtonienne n'est pas très bien vérifiée sauf en prenant des valeurs élevées de n .