

Partie A :

A-I-a-1 : $U_1(t) dt = U_2(t) dt = U_3(t) dt = \dot{m} u_s = \dot{m} u_e$ compte tenu du régime stationnaire.

A-I-a-2 : 1^{er} principe : $U_1(t) dt = U_2(t) dt = W^* + Q = P_e \dot{m}_e = P_s \dot{m}_s$ soit :

$$\dot{m} u_s + P_s \dot{m}_s u_e = P_e \dot{m}_e u_e + W^* + Q \quad \text{ou} \quad \dot{m} h_s + h_e \dot{m} = W^* + Q$$

A-I-b : L'échangeur placé à l'intérieur de la maison doit fournir de la chaleur, ce qui est obtenu par le refroidissement isobare de l'air de l'échangeur **E**, l'intérieur de la maison joue le rôle de source chaude. (l'échangeur **E'** permet de réchauffer l'air en prélevant de la chaleur sur le milieu extérieur = source froide)

A-I-c : La chaleur récupérée dans la maison est extraite de l'air dans l'échangeur **E** :

$$|Q_E| = Q_E = \dot{m} c_p (T_2 - T_3)$$

Il a fallu fournir du travail dans **C** et dans **T** :

$$\text{- dans C : } W_c^* = \dot{m} h_2 - h_1 = \dot{m} c_p (T_2 - T_1) \quad \text{car } Q_c = 0$$

$$\text{- dans T : } W_t^* = \dot{m} h_4 - h_3 = \dot{m} c_p (T_4 - T_3) \quad \text{car } Q_t = 0$$

Travail total fourni : $W^* = \dot{m} h_2 - h_1 + \dot{m} h_4 - h_3 = \dot{m} c_p (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)$

$$\eta = \frac{|Q_E|}{W^*} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1 + T_4 - T_3} = \frac{1}{1 + \frac{T_4 - T_1}{T_2 - T_3}}$$

Efficacité :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{37}{50}} = 0,26$$

A-I-d : $\eta = 0,26 < 0,4$ la solution est : $\eta = 3,85$

A-II-a : dans **C** : $W_c^* = \dot{m} h_2 - h_1 = \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$; A.N. : $W_c^* = 1000 \times 95 = 95 \text{ KJ.kg}^{-1}$

A-II-b : dans **T** : $W_t^* = \dot{m} h_4 - h_3 = \dot{m} c_p (T_4 - T_3)$; A.N. : $W_t^* = 1000 \times 82 = 82 \text{ KJ.kg}^{-1}$

A-II-d : le moteur fournit $W^* = W_c^* + W_t^* = W_c^* = 95 - 82 = 13 \text{ KJ.kg}^{-1}$

Pour ce qui est du travail autre que celui des forces de pression, le compresseur en consomme, alors que la turbine en produit. Le couplage de la turbine et du compresseur permet de récupérer le travail produit par la détente de l'air dans la turbine et de s'en servir pour faire fonctionner le compresseur. On voit que l'apport est très important : 82 KJ.kg^{-1} sur 95 KJ.kg^{-1} .

A-III-a : $\frac{dH}{dt} = D_m c_p (T_f - T_i)$

A-III-b : ici on veut : $\frac{d|Q_E|}{dt} = D_m c_p (T_2 - T_3) = 20 \text{ kW}$ d'où $D_m = 0,4 \text{ kg.s}^{-1}$

Partie B : Le schéma de la figure 2 ne correspond pas au texte, l'axe Oy du schéma doit en réalité s'appeler Oz, ce que je considère dans la suite. L'hypothèse de régime quasi-stationnaire n'est pas mentionnée dans le texte, elle est pourtant indispensable.

B-I-1 : Le plan qui contient le point M et l'axe Oz est un plan de symétrie pour la distribution des courants, le champ magnétique est donc perpendiculaire à ce plan : pour un point M dans le plan Ozx, le champ magnétique est colinéaire à Oy. (dans la suite on suppose que l'orientation choisie pour le courant définit une normale à la spire dirigée dans le même sens que Oy)

B-I-2 : On utilise le théorème d'Ampère en exprimant la circulation du champ $\mathbf{B}$ sur le cercle que décrit M par rotation de la figure autour de Oz.

$$\oint_{\text{cercle}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_y dl = \int \frac{\mu_0 n i}{2\pi x} u_y dl \quad \text{d'où :}$$

$$2\pi x B = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 n i}{2\pi x} b dx = \frac{\mu_0 n i b}{2\pi x} \ln \frac{x+a}{x-a}$$

B-I-3 :

B-I-4 : pour $x_1 \ll a$: soit $X = x_1 +$ il vient :

$$\ln \frac{x_1+a}{x_1} = \ln \frac{X+a}{X} = \ln \frac{1+\frac{a}{X}}{1} = \ln \left(1 + \frac{a}{X} \right) \approx \frac{a}{X} = \frac{a}{x_1 + \frac{a}{2}}$$

Donc $B = \frac{\mu_0 n i b}{2\pi} \frac{2a}{l} = \frac{\mu_0 n i b a}{\pi l}$ d'où l'expression de R.

B-II-1 : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{f1}}$ et $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{f2}}$ d'où :

B-II-2 : Le flux total à travers une spire de l'enroulement 1 est : $\Phi_1 = n_1 \Phi_{11} + n_2 \Phi_{12}$ le flux total à travers l'enroulement 1 est donc :

$$\Phi_1 = n_1 \left(\frac{n_1 i_1}{R_1} + \frac{n_2 i_2}{R_{12}} \right) \quad \text{et} \quad \Phi_2 = n_2 \left(\frac{n_2 i_2}{R_2} + \frac{n_1 i_1}{R_{12}} \right)$$

d'où : $L_1 = \frac{n_1^2}{R_1}$, $L_2 = \frac{n_2^2}{R_2}$ et $M = \frac{n_1 n_2}{R_{12}}$

B-II-3 : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{f1}}$ et $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{f2}}$ en utilisant les relations ci-dessus :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{n_1 n_2}{M n_1^2} + \frac{1}{R_{f1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{R_2} = \frac{n_2 n_1}{M n_2^2} + \frac{1}{R_{f2}}$$

B-II-4 : $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{f1}}$ donc $K = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_1 R_2}}}$

Le couplage total correspond à une absence de fuites magnétiques donc à $\Phi_{f1} = \Phi_{f2} = 0$, tout le flux qui traverse un enroulement 1 traverse aussi un enroulement 2. Les coefficients de Hopkinson sont égaux à 1 donc $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ et $K = 1$

B-III-1 : En l'absence de résistance : $V_1 = e_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ soit avec les grandeurs

complexes : $\underline{V}_1 = j\omega L_1 \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2$ et $\underline{V}_2 = j\omega L_2 \underline{i}_2 + M j\omega \underline{i}_1$

B-III-2-a : Secondaire ouvert : $i_2 = 0$ donc : $\underline{H} = \frac{M}{L_1} = K \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

B-III-2-b : Pour un couplage total $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ soit en faisant le rapport : $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 1 = \frac{L_1 n_2^2}{L_2 n_1^2}$, de plus

$\underline{H} = K \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{n_2}{n_1}$
 K = 1 donc le rapport des tensions est simplement égal au rapport de transformation dans ce cas, le transformateur a un comportement parfait, mais uniquement pour la sortie ouverte.

B-III-3-a : Enroulement 2 en court-circuit, donc $V_2 = 0 \Rightarrow \underline{i}_2 = -\frac{M}{L_2} \underline{i}_1 = -\frac{K \sqrt{L_1 L_2}}{L_2} \underline{i}_1$

$$\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -K \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

B-III-3-b : Dans le cas du couplage total : K = 1 et $1 = \frac{L_1 n_2^2}{L_2 n_1^2}$ donc $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{n_1}{n_2}$ on retrouve l'expression pour le transformateur parfait, mais uniquement pour la sortie en court-circuit.

B-IV-1 : $\underline{V}_1 = r \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2$; $\underline{V}_2 = j\omega M \underline{i}_1 + j\omega L_2 \underline{i}_2$; $\underline{V}_2 = r \underline{i}_2$

B-IV-2 : $\underline{i}_2 = -\frac{r \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1}{j\omega M}$ d'où $\underline{V}_1 = \frac{r^2 \underline{i}_1 + j\omega L_1 r \underline{i}_1}{j\omega M}$ et $\underline{H} = \frac{r \underline{i}_2}{\underline{V}_1}$

$$\underline{H} = \frac{r}{\frac{r^2 \underline{i}_1 + j\omega L_1 r \underline{i}_1}{j\omega M}} = \frac{r}{2r \frac{L}{M} + j \frac{r^2}{M} + \frac{L^2}{M}} = \frac{\frac{M}{2L}}{1 + \frac{j}{2} \frac{r}{L} + \frac{r^2}{L^2} \frac{M^2}{L^2}}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{M}{2L}}{1 + \frac{j}{2} \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}} - \frac{r}{L} \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}} + \frac{L}{r} \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}}} \quad \text{or} \quad K = \frac{M}{L} \quad \text{d'où l'expression}$$

demandée.

$$H = \frac{1}{1 + j\frac{r}{L}}$$

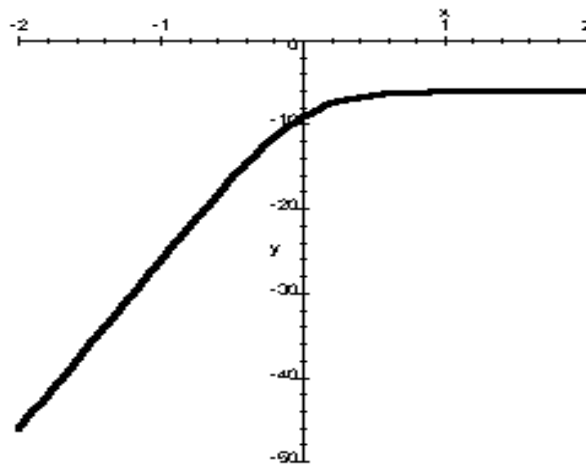
B-IV-3 -a : $K = 1$ donc l'expression ci-dessus se transforme en :

forme donnée, donc : $A = \frac{1}{2}$ et $\omega_c = \frac{r}{2L}$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{A}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}$$

B-IV-3 -b : $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{A}{1} = 20 \log A = 20 \log \frac{1}{2} = -6 \text{ dB}$ droite de pente 20dB/décade
 $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} = 20 \log A - 40 \log \omega$

B-IV-3 -c :



B-IV-3 -d : Filtre passe-haut de bande passante $\omega > \omega_c$.

$$G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \sqrt{1 + Q^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 20 \log H_0 - 40 \log \omega$$

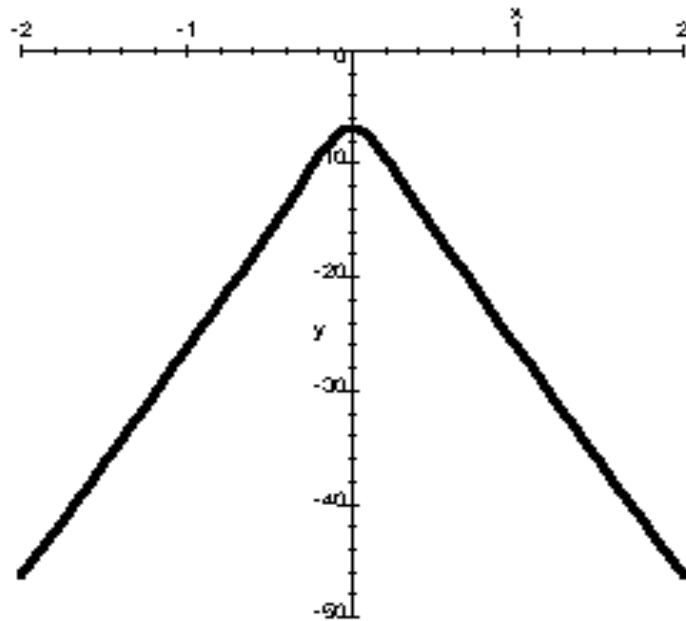
B-IV-4 -a :

$$G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q \frac{\omega}{\omega_0}$$

B-IV-4 -b : $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow$ droite de pente 20dB/décade

$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log \omega$ droite de pente -20dB/décade

B-IV-4 -c : Il y a un maximum pour $\omega = \omega_0$: $G_{dB \max} = 20 \log H_0$



B-IV-4 -d : Filtre passe-bande, de bande passante comprise entre :

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) \quad \text{de largeur :} \quad \frac{\omega_0}{Q}$$