
Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Oviedo

CURSO 2022-2023 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

➢ Responde en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2,5 puntos.

➢ Indica en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderás: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) ultima(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1.- En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0,15 litros y en total se tomaron 3m litros de vino.
a) [0,5 puntos] Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.
b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Resolución

Según el enunciado, $\begin{cases} x = my \\ 0,15(x + y) = 3m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = my \\ x + y = 20m \end{cases} \Rightarrow$ $my + y = (m + 1)y = 20m$

Si m ≠ –1, el sistema tiene solución única, que es $y = \frac{20m}{m+1}$, $x = m\frac{20m}{m+1} = \frac{20m^2}{m+1}$

Si en total se consumieron 9 litros, entonces 3m = 9, m = 3 y queda

$(3 + 1)y = 20.3 \Rightarrow y = 15$; $x = 3.15 = 45$. O sea 45 copas de vino tiento y 15 de vino blanco

Pregunta 2.- Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30000 euros; cada vehículo pequeño, 20000 euros y dispone de un presupuesto total

----

de 500000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.
a) [1,75 puntos] ¿Cuantos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?
b) [0,75 puntos] El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Resolución

Representamos en una tabla los datos del problema:

	nº de unidades	**mantenimiento anual (en €)**	**coste (en €)**	**beneficio (en €)**
vehículo grande	x	600x	30000x	10000x
vehículo pequeño	y	300y	20000y	6000y
total	x + y	600x + 300y	30000x + 20000y	10000x + 6000y

La función a optimizar (maximizar) es el beneficio f(x, y) = 10000x + 6000y

Las restricciones son

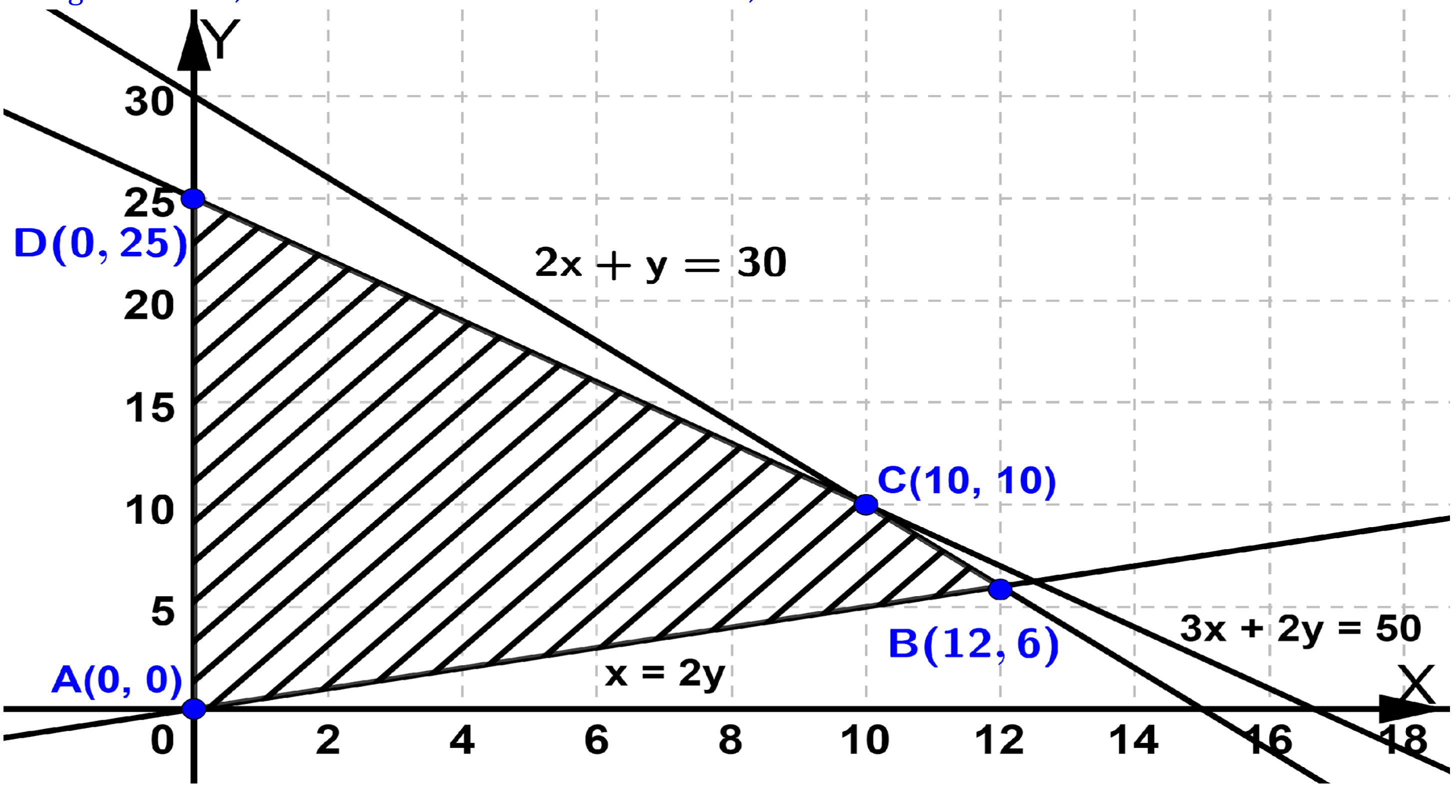
$$\begin{cases} 30000x + 20000y \leq 500000 \\ x \leq 2y \\ 600x + 300y \leq 9000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y \leq 50 \\ x \leq 2y \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Veamos si se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños:

Si x = 8, y = 20, entonces no secumple la 1ª restricción pues $3.8 + 2.20 \leq 50 \rightarrow 64 \leq 50$ (falso)

Luego, no se pueden comprar

La región factible, solución del sistema de inecuaciones, es



Veamos en qué vértices alcanza el valor máximo el beneficio f(x, y) = 10000x + 6000y

f(A) = f(0, 0) = 10000.0 + 6000.0 = 0 f(B) = f(12, 6) = 10000.12 + 6000.6 = 156 000

f(C) = f(10, 10) = 10000.10 + 6000.10 = 160 000 f(D) = f(0, 25) = 10000.0 + 6000.25 = 150 000

Luego, el beneficio máximo es 160 000 € y se obtiene comprando 10 vehículos grandes y 10 pequeños.

Pregunta 3.- El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \{\ a(x + 2),\ si\ 0 \leq x \leq 2\ 3(x^2 - 6x + 12),\ si\ 2 < x \leq 4\ -x^2 + 11x - 16,\ si\ 4 < x \leq 8$$

a) [0,75 puntos] Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

Resolución

Observamos que Dom f = [0, 8] y para x ≠ 2, x ≠ 4, f es continua en su dominio por ser el resultado de operar con funciones continuas.

$f(x) = f(4) = 3(4^2 - 6.4 + 12) = 12 = f(x) \ = - 4^2 + 11.4 - 16 = 12$ ⇒ continua en x = 4

$f(x) = f(2) = a(2 + 2) = 4a\ ;\ f(x) \ = 3(2^2 - 6.2 + 12) = 12$.

Luego, f es continua en x = 2 si 4a = 12, o sea, si a = 3

Conclusión: para que f sea continua en su dominio debe ser a = 3.

b) [0,75 puntos] Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Resolución

Como a = 3,

$f(x) = \{\ 3(x + 2),\ si\ 0 \leq x \leq 2\ 3(x^2 - 6x + 12),\ si\ 2 < x \leq 4\ -x^2 + 11x - 16,\ si\ 4 < x \leq 8$; continua en [0, 8]

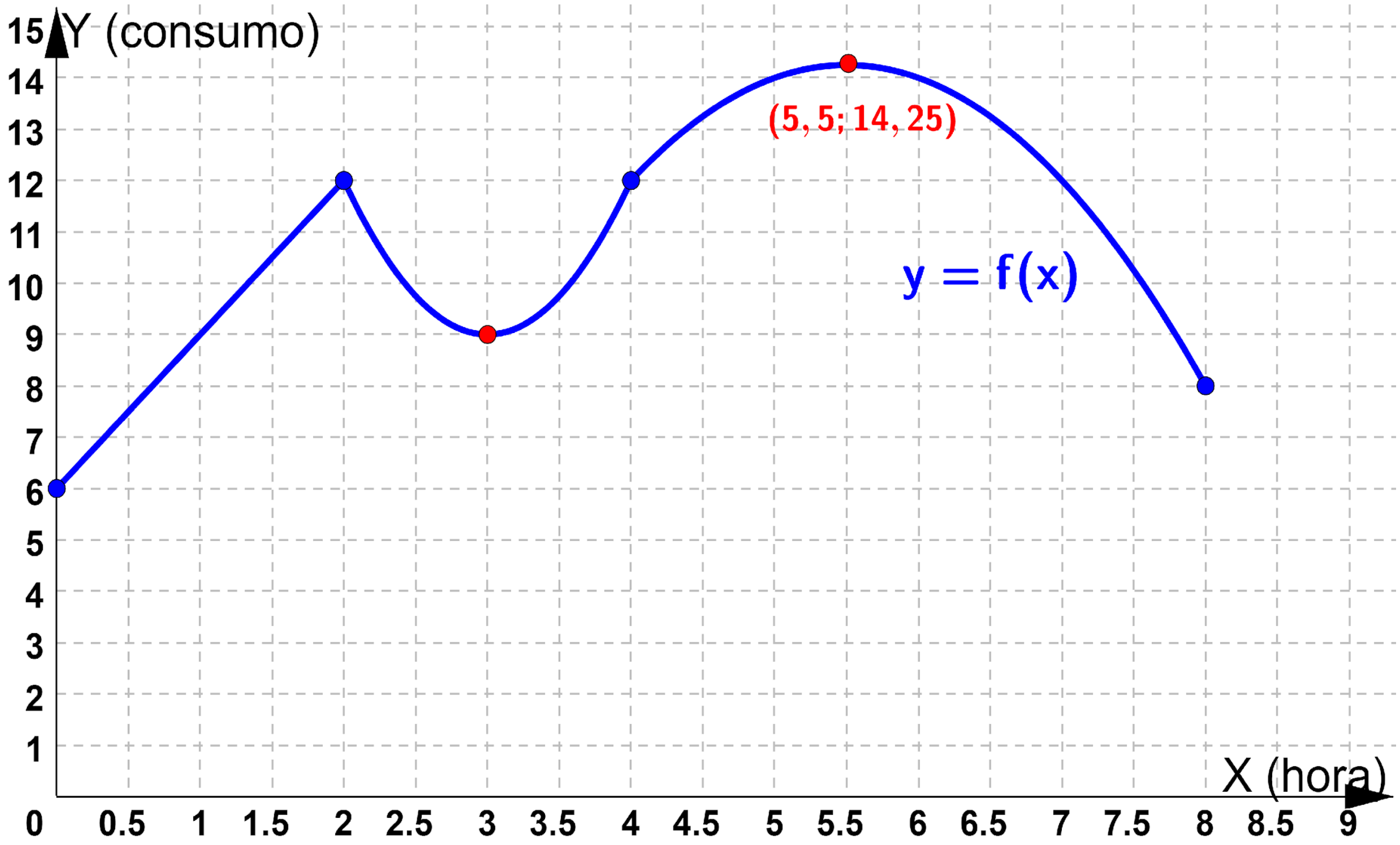
Para 0 ≤ x ≤ 2, la gráfica de f es un segmento ; como f(0) = 3(0 + 2) = 6 , f(2) = 3(2 + 2) = 12, la gráfica es el segmento que pasa por (0, 6) y (2, 12)

Para 2 < x ≤ 4, la gráfica de f es un trozo de parábola convexa ; f(4) = 12 y
$[3(x^2 - 6x + 12)]' = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $y = f(3) = 3(3^2 - 6.3 + 12) = 9$.

La gráfica es el trozo de parábola convexa que pasa por (2, 12), (4, 12) y de vértice (mínimo relativo) el punto (3, 9)

Para 4 < x ≤ 8, la gráfica de f es un trozo de parábola cóncava ; $f(8) = -8^2 + 11.8 - 16 = 8$ y
$(-x^2 + 11x - 16)' = -2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 5{,}5$, $y = f(5{,}5) = -5{,}5^2 + 11.{,}5 - 16 = 14{,}25$.

La gráfica es el trozo de parábola cóncava que pasa por (4, 12), (8, 8) y de vértice (máximo relativo) el punto (5,5 ; 14,25)



Recordemos que el tiempo inicial es 6 h.

El consumo es máximo cuando han trascurrido 5,5 h, o sea, a las 11 h 30 min y vale 14,25

El consumo es mínimo cuando han trascurrido 0 h, o sea, a las 6 h y vale 6

Pregunta 4.- Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:
a) [0,5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

Resolución

Primitivas de f : $F_c(x) = e^x + 2x + c$. Como $F(0) = 3$, entonces $e^0 + 2.0 + c = 3$, $1 + c = 3$, $c = 2$

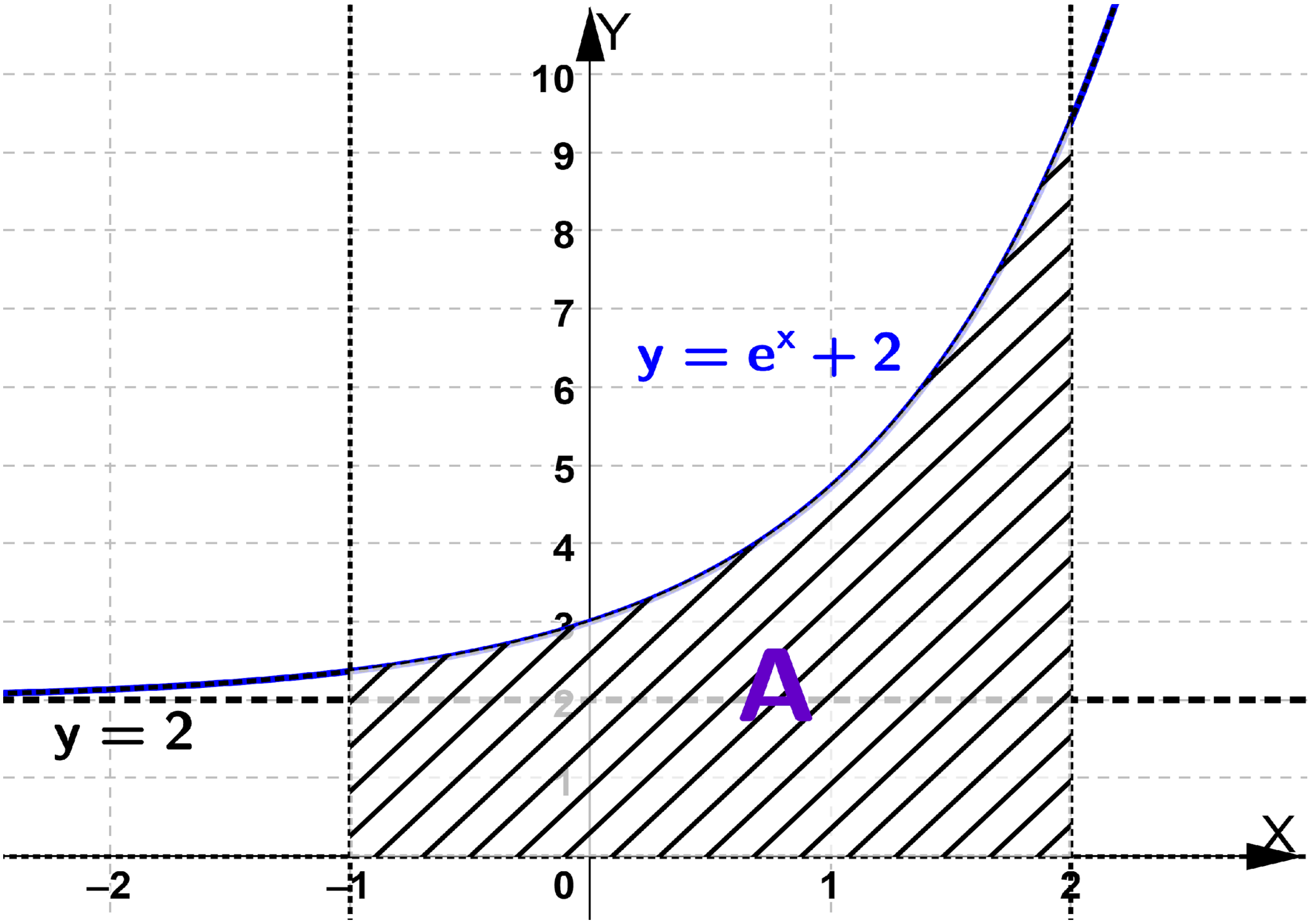
Luego, la primitiva es $F(x) = e^x + 2x + 2$

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Resolución

Observa que $f(x) = e^x + 2 > 0$ y su gráfica es una traslación 2 unidades hacía arriba de $y = e^x$.

$f(0) = e^0 + 2 = 3$; $f(-1) = e^{-1} + 2 \cong 2{,}4$; $f(2) = e^2 + 2 \cong 9{,}4$; $f(x) = 2$; $f(x) = +\infty$
El recinto cuya área se pide es



El área que se pide es $A = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (e^x + 2)\,dx$. Una primitiva de f es $F(x) = e^x + 2x$.

Por la regla de Barrow $A = F(2) - F(-1) = e^2 + 2.2 - \left[e^{-1} + 2(-1)\right] = e^2 - e^{-1} + 6 \cong 13,06\ u^2$

Pregunta 5.- El 80% de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25% de todos los empleados hablan alemán. Además, el 20% de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.
a) [1,25 puntos] Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés, pero no alemán?
b) [1,25 puntos] Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Resolución

I = el empleado habla inglés A = el empleado habla inglés

Según el enunciado, p(I) = 0,8 p(A) = 0,25 p(A/I) = 0,2 → p(A ∩ I) = p(I)p(A/I) = 0,8 . 0,2 = 0,16

a) Se pide $p(I \cap A^c) = p(I) - p(A \cap I) = 0,8 - 0,16 = 0,64 = 64\%$

b) Nos piden $p\left(\frac{I^c}{A}\right) = 1 - p\left(\frac{I}{A}\right) = 1 - \frac{p(I \cap A)}{p(A)} = 1 - \frac{0,16}{0,25} = 0,36 = 36\%$

Pregunta 6.- El 30% de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80% tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes

al trabajo, el 40% tienen tarjeta de fidelidad.
a) [1,25 puntos] Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?
b) [1,25 puntos] Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Resolución

T = el pasajero viaja por motivos de trabajo   F = el pasajero tiene tarjeta de fidelidad

Según el enunciado, $p(T) = 0{,}3 \rightarrow p(T^c) = 1 - p(T) = 0{,}7$ $p(F/T) = 0{,}8$ $p(F/T^c) = 0{,}4$

a) Se pide p(F). Por el teorema de probabilidad total,

$p(F) = p(T)p(F/T) + p(T^c)p(F/Tc) = 0{,}3 \,.\, 0{,}8 + 0{,}7 \,.\, 0{,}4 = 0{,}52 = 52\%$

b) Nos piden $p\left(\frac{T}{F}\right) = \frac{p(T \cap F)}{p(F)} = \frac{p(T)\,p(F/T)}{p(F)} = \frac{0{,}3\,.\,0{,}8}{0{,}52} \cong 0,4615 = 46,15\%$

Pregunta 7.- En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.
a) [1 punto] Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0,1?

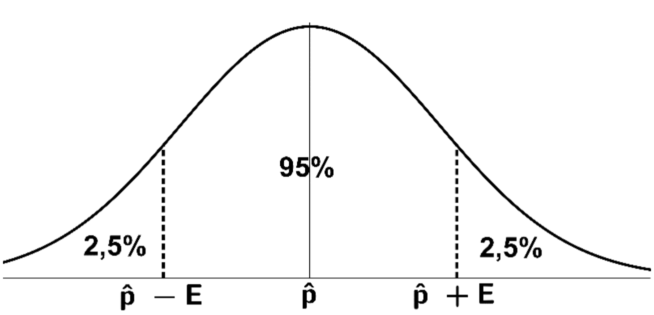
Resolución

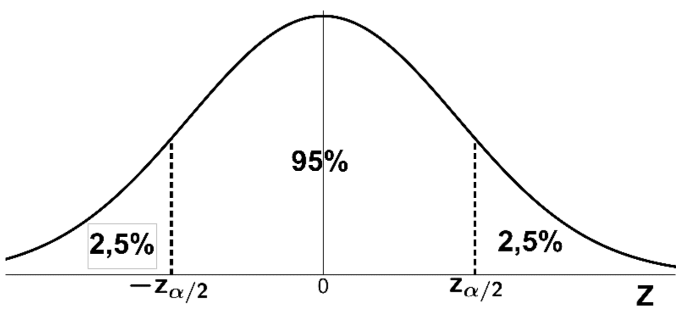
La v.a. "proporción de jóvenes de cada muestra, elegida al azar, con carné de conducir", tiene una distribución Normal $N\left(p,\ \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right)$ donde p es la proporción del total y n el tamaño de la muestra

Sabemos que $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}$, es el máximo error de estimación

Como no tenemos un valor de la proporción muestral tomaremos $\hat{p} = 0,5$.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 95% = 5%   y   5% : 2 = 2,5%





$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 95\% + 2,5\% = 97,5\% = 0,975$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}95}{2} = 0,975$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,975$ *usando la tabla de la* $N(0,1)$ $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96.$

Piden hallar n tal que $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0,1$ $\quad$ *elevando al cuadrado* $\rightarrow (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} \leq 0,1^2$

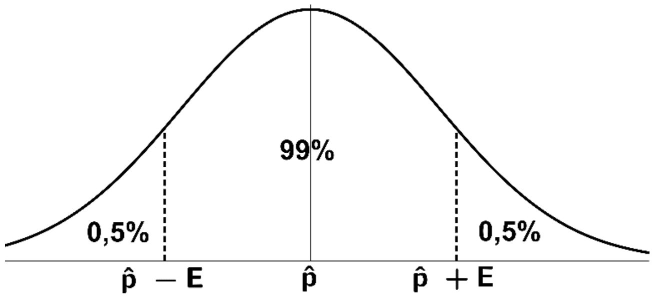
Despejando, $n \geq (z_{\alpha/2})^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{0,1^2} = 1,96^2 \cdot \frac{0,5(1-0,5)}{0,1^2} \cong 96,04$.

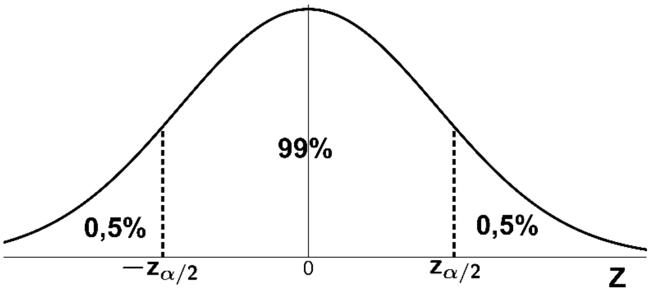
Luego, el tamaño mínimo de la muestra es 97 jóvenes.

b) [1,5 puntos] Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99%, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Resolución

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 99% = 1% y 1% : 2 = 0,5%





$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 99\% + 0,5\% = 99,5\% = 0,995$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0,99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ $\quad$ *usando la tabla de la* $N(0,1)$, *por interpolación* $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

En el problema, $z_{\alpha/2} = 2,575$; $\quad \hat{p} = \frac{120}{140} \cong 0,86$ $\;y\;$ $n = 140$

Sustituyendo: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,86(1-0,86)}{140}} \cong 0,07551$.

$$I_c = (0,86 - 0,07551\,;\, 0,86 + 0,07551) \cong (0,7845\,;\, 0,9355).$$

Pregunta 8.- Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200

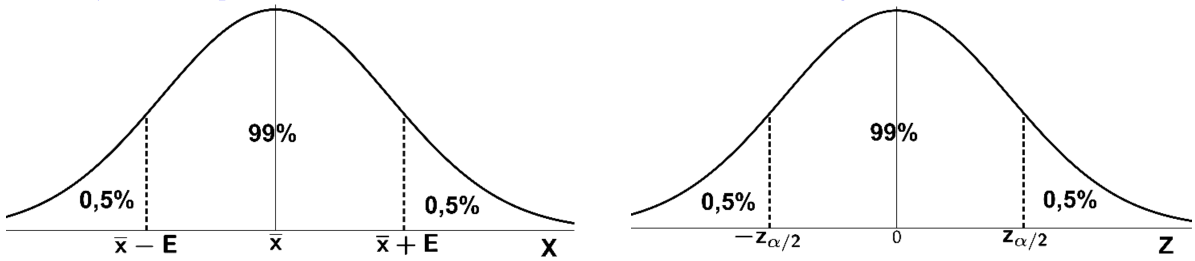
pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17,5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.
a) [1,5 puntos] Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99%, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

Resolución

X = tiempo →$N(\mu\,;4)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 99% para estimar la media, μ es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 17,5$ la media de la muestra de tamaño n = 200,

$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

Como el área bajo la campana es 100%, entonces 100% – 99% = 1% y 1% : 2 = 0,5%



$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = 99\% + 0,5\% = 99,5\% = 0,995$

Esta probabilidad coincide con $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ *usando la tabla de la $N(0,1)$, por interpolación* $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575.\frac{4}{\sqrt{200}} \cong 0,728$; $I_c = (17,5 - 0,728\,;\ 17,5 + 0,728) \cong (16,77\,;18,23)$

b) [1 punto] ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99,5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

∗ Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90 F(1,64) = 0,95 F(1,96) = 0,975 F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Resolución

Como ahora el nivel de confianza es del 99,5%, es decir, mayor que el anterior, entonces el valor de $z_{\alpha/2}$ sería mayor y, por tanto, el error, $E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, también sería mayor.