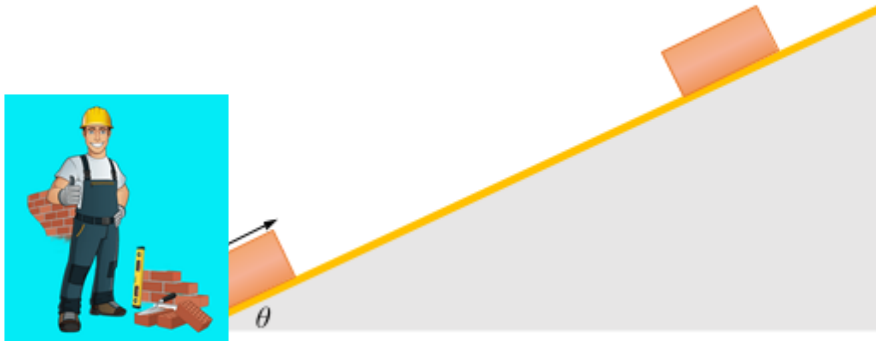


## Η χιονισμένη σανίδα

σχήμα 1



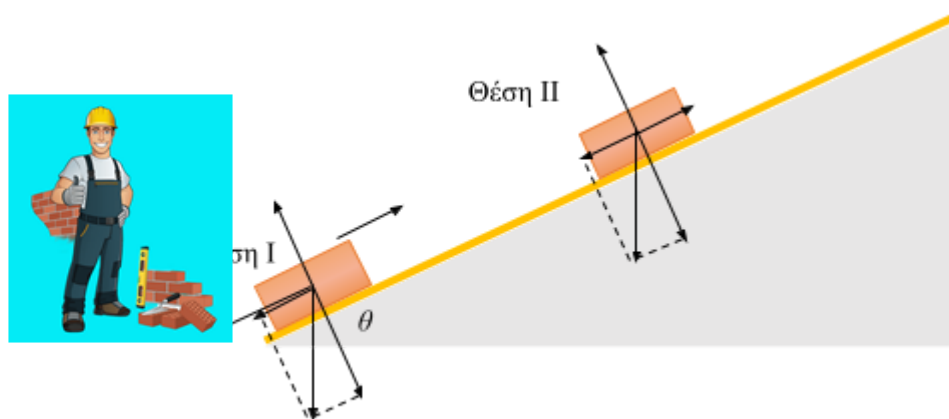
Μια χειμωνιάτικη μέρα, ένας εργάτης εκτοξεύει τούβλα ...προς τα πάνω, από τη βάση μιας κεκλιμένης σανίδας, με γωνία κλίσης  $\theta = 30^\circ$ . Η σανίδα έχει πιάσει πάγο όχι ομοιόμορφα, έχοντας παγώσει περισσότερο στο κάτω μέρος. Σαν συνέπεια, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης αυξάνεται με την απόσταση από τη βάση της σανίδας και δίνεται από την εξίσωση  $\mu = c \cdot x$ , όπου  $c = (1/2\sqrt{3})m^{-1}$  μια θετική σταθερά και  $x$  η απόσταση που διανύει κάθε τούβλο πάνω στη σανίδα με  $x = 0$  στο έδαφος. Οι συντελεστές τριβής στατικής και ολισθήσεως θεωρούνται ίσοι. Ο εργάτης δίνει στα τούβλα αρχική ταχύτητα μέτρου  $v_0$  και η βαρυτική επιτάχυνση είναι  $g = 10m/s^2$ . Δίνονται και  $\eta\mu 30 = 1/2$ ,  $\sigma\eta\nu 30 = \sqrt{3}/2$ .

- α) Αν η αρχική ταχύτητα είναι σχετικά μικρή, ο εργάτης παρατηρεί ότι το κάθε τούβλο ανέρχεται στη σανίδα, σταματάει και επιστρέφει. Από μια κρίσιμη όμως τιμή και πάνω, στο μέτρο της αρχικής ταχύτητας, τα τούβλα φτάνουν σε κάποιο σημείο σταματούν και δεν επιστρέφουν. Μπορείτε να δώσετε μια ποιοτική εξήγηση για αυτό το φαινόμενο;
- β) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση  $x_{min}$ , που πρέπει να διανύσει ένα τούβλο πάνω στη σανίδα, για να σταματήσει μόνιμα; Η απόσταση αυτή εξαρτάται από τη μάζα των τούβλων;
- γ) Βρείτε το μέτρο  $T$  της τριβής ολίσθησης, σε συνάρτηση με τη μάζα  $M$  κάθε τούβλου και την απόσταση  $x$  από το σημείο εκτόξευσης και κάνετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση  $T = f(x)$ , μέχρι τη θέση  $x_{min}$ , που υπολογίσατε στο ερώτημα (β).
- δ) Βρείτε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας  $v_0$ , που απαιτείται για να φτάνει κάθε τούβλο στη θέση  $x_{min}$ .

## Απάντηση

α) Ας παρατηρήσουμε το σχήμα 1. Μετά την εκτόξευση στη θέση I, τα τούβλα δέχονται στη διεύθυνση της κίνησης συνισταμένη δύναμη  $\sum \vec{F}_x = \vec{W}_x + \vec{T}$  και επιβραδύνονται μέχρι να σταματήσουν στη θέση II. Τότε όμως η τριβή αλλάζει φορά. Για να επιστρέψει ένα τούβλο, πρέπει να σταματήσει να ανέρχεται στη σανίδα και στη συνέχεια η συνιστώσα  $\vec{W}_x$  να έχει μέτρο μεγαλύτερο από το μέτρο της οριακής τριβής (εδώ και της τριβής ολίσθησης) και να φέρει το σώμα πίσω.

σχήμα 1



Όσο το τούβλο ανέρχεται, μεγαλώνει η διατιθέμενη οριακή τριβή αφού ο συντελεστής τριβής αυξάνεται σύμφωνα με την εξίσωση  $\mu = c \cdot x$ . Συμπεραίνουμε πως αν ανέβει «αρκετά ψηλά» και σταματήσει, μπορεί να ακινητοποιηθεί. Πόσο είναι αυτό το «αρκετά ψηλά»; Θα το δούμε στα επόμενα ερωτήματα.

β) Αν  $M$  η μάζα ενός τούβλου, η κάθετη αντίδραση του δαπέδου βρίσκεται από τη συνθήκη

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow N - W_y = 0 \Leftrightarrow N = M g \sin \theta \quad (1)$$

Η συνθήκη μη επιστροφής είναι

$$W_x \leq T_{op} \Leftrightarrow W \eta \mu \theta \leq \mu \cdot N \xrightarrow{(1)} M g \eta \mu \theta \leq c \cdot x \cdot M g \sin \theta \Leftrightarrow x \geq \frac{\eta \mu \theta}{c \cdot \sin \theta} \Leftrightarrow x \geq \frac{\varepsilon \varphi \theta}{c}$$

Άρα η ελάχιστη απόσταση που πρέπει να διανύσει είναι  $x_{min} = \frac{\varepsilon \varphi \theta}{c}$

Παρατηρούμε ότι η απάντηση δεν εξαρτάται από τη μάζα των τούβλων.

Με αντικατάσταση παίρνουμε

$$x_{min} = \frac{\varepsilon \varphi \theta}{c} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{1}}{2\sqrt{3}} = 2m$$

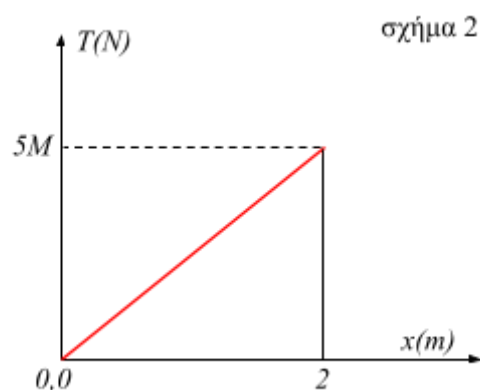
γ) Το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι

$$T = \mu \cdot N \xrightarrow{(1)}$$

$$T = c \cdot x \cdot M g \sin \theta \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{M}{2\sqrt{3}} 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$T = 2,5M \cdot x \text{ (S.I.)}, 0 \leq x \leq 2m$$



Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 2.

δ) Θα εφαρμόσουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση της εκτόξευσης μέχρι τη θέση που σταματά μόνιμα.

- Το έργο του βάρους  $W_\beta = W_{\beta x} + W_{\beta y} = W_{\beta x} + 0 = -M g \mu \theta \cdot x_{min} = -10M$  (S.I.)
- Το έργο της κάθετης αντίδρασης είναι  $W_N = 0$
- Το έργο της τριβής είναι κατά απόλυτη τιμή ίσο με το εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης  $T \rightarrow x$  και του άξονα των  $x$ .

$$|W_T| = E2\mu\beta\alpha\delta \nu \Rightarrow \frac{I}{2} \cdot 5M \Rightarrow |W_T| = 5M$$

$$\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_\beta + W_N - |W_T| \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} M v_0^2 = -10M - 5M \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = -10 - 5 \Leftrightarrow v_0^2 = 30 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{30} \text{ m/s}$$

**Ανδρέας Ριζόπουλος**