

Делимость. Основная теорема арифметики.

Говорят, что число a делится на b (или говорят, что число b делитель числа a), если существует число c такое, что $a=bc$.

Простые числа – числа, имеющие ровно 2 делителя.

Составные числа – числа, имеющие больше двух делителей.

Взаимно простые числа – числа, не имеющие общих простых делителей, то есть НОД их равен 1.

Алгоритм нахождения НОД, не используя разложения чисел на простые множители, называют Алгоритм Евклида. Он состоит в последовательном применении правила: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a-b, b)$.

Пример: Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+2}$ – несократима ни при каком натуральном n .

Дробь не сократима, значит НОД числителя и знаменателя равен 1. Найдем возможные значения $\text{НОД}(30n+2, 12n+1) = \text{НОД}(6n, 12n+1) = \text{НОД}(6n, 1) = 1$.

Основная теорема арифметики: любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения степеней простых чисел $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$.

Если число $A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$, то количество натуральных делителей числа можно вычислить по формуле $d(A) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n + 1)$.

Пример: Найдите количество натуральных делителей числа 84.

Решение.

Разложим 84 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Таким образом, каноническое разложение имеет вид $84=2^2 \cdot 3 \cdot 7$. Тогда число натуральных делителей равно $(2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1)=12$.

Практическая работа

Задание 1. Произведение некоторых простых чисел равно 30030. Каким числом является их сумма – простым или составным?

Задание 2. Известно, что a, b, c – простые числа, причем произведение abc четно. Докажите, что сумма $a+b+c$ также четна.

Задание 3. Замените звездочки четырьмя одинаковыми цифрами так, чтобы числа $1**$ и $*4*$ были взаимно простыми. Укажите все возможные решения.

Задание 4. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее 8 натуральных делителей.

Задание 5. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 77, и имеющее 8 натуральных делителей.

Задание 6. Даны числа a, b и c , причем a делится на b и b делится на c . Найдите НОД (a, b, c) и НОК (a, b, c).

Задание 7. Если натуральное число делится на a и на b , то оно делится и на произведение ab . Каким свойством должны обладать натуральные числа a и b , чтобы это утверждение было верным?

Задание 8. Найдите НОД и НОК чисел $70a$ и $55b$, где a и b – простые числа, большие 10.

Задание 9. Мальчик и девочка измерили одно и то же расстояние в 143 м шагами, причем 20 раз их следы совпали. Найдите длину шага мальчика, если шаг девочки равен 55 см.

Задание 10. Разность двух нечетных чисел равна 8. Докажите, что эти числа взаимно простые.

Задание 11. Задумано пятизначное число, являющееся кубом натурального числа. Восстановите задуманное число, если известно, что оно должно делиться на 3 и последняя его цифра 6.

Задание 12. Ваня задумал простое трёхзначное число, все цифры которого различны. На какую цифру оно может оканчиваться, если его последняя цифра равна сумме первых двух?

Задание 13. $\text{НОК}(x, 96) = 192$. Найдите все возможные значения x .

Задание 14. Доказать, что если p и p^2+2 – простые числа, то и p^3+4 – тоже простое.

Задание 15. Найдите НОД всех пятизначных чисел, записанных при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений.

Задание 16. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых $n^3 - 3$ делится на $n - 1$.

Задание 17. Известно, что дробь $\frac{2n+9}{3n+10}$ сократима. На какое число она может быть сокращена? (дробь сократима, если числитель и знаменатель делятся на одно и то же натуральное число, отличное от 1).

Задание 18. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3m - n}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима и что числа m и n взаимно просты.