

Correction de l'épreuve de physique I de E4A

A Dipôle électrostatique

A.I.1 Un dipôle est un ensemble de 2 charges identiques de signe opposé, située à « faible » distance l'une de l'autre.

« faible » signifiant négligeable devant la distance OM de calcul du champ dans le cas du dipôle actif et faible devant les distances de variation du champ électrique dans le cas du dipôle passif.

$$\mathbf{p} = 2a q \mathbf{e}_z$$

L'unité est le Coulomb. mètre (C.m) (ou le Debye $1 \text{ D} = 1/3 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$).

A.I.2.a) Le système est un système de révolution autour de l'axe Oz, il est invariant par toute rotation d'un angle ϕ autour de Oz, il suffit donc d'étudier le problème dans le plan méridien.

A.I.2.b) N'importe quel plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie du problème. Le champ est contenu dans les plans de symétrie, il ne possède donc pas de composante orthogonale à ce plan.

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

A.I.2.c) Calcul classique $V = p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2$

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(V) = 2 p \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{e}_r + p \sin \theta / 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{e}_\theta$$

Calculons $3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}$:

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) = p \cos \theta \quad \mathbf{p} = p \cos \theta \mathbf{e}_r - p \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad \text{d'où } 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p} = 2 p \cos \theta \mathbf{e}_r + p \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

A.I.2.e) Le champ créé par une source ponctuelle décroît en r^{-2} celui du dipôle en r^{-3} .

A.I.2.f)

A.I.2.g) Equation des lignes de champ :

$$dr \sin \theta = 2 r \cos \theta d\theta ; \quad dr/r = 2 \cos \theta d\theta / \sin \theta$$

$$\ln |r| = 2 \ln (\sin |\theta|) \quad r = K \sin^2 \theta$$

$$\text{équipotentiels } r^2 = K' \cos \theta$$

K' constante positive si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ et négative si $\cos \theta < 0$

Soit ϕ l'angle fait par la ligne de champ avec le rayon vecteur.

$$\tan \phi = dr / r d\theta = 2 \cos \theta / \sin \theta$$

Soit ϕ' l'angle fait par la ligne équipotentielle avec le rayon vecteur. $V = \text{cste}$ entraîne par dérivation logarithmique

$$\tan \phi' = dr / r d\theta = -1/2 \sin \theta / \cos \theta \quad \text{d'où } \tan \phi' \cdot \tan \phi = -1 \text{ les 2 directions sont bien orthogonales.}$$

II.1 $\mathbf{R} = q \mathbf{E}_0 - q \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$ La résultante est nulle

A.I.2.h) Les charges étant immobiles, il n'y a pas de champ magnétique créé.

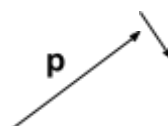
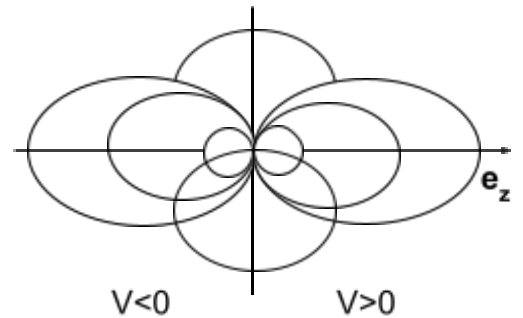
II Actions subies par un dipôle

$$\text{II.2 } \Gamma = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_0$$

$$\text{II.3 } \mathbf{E}_p = q \nabla V(P)$$

$$\text{II.4 } \mathbf{E}_d = -q \nabla V(N) + q \nabla V(P) \text{ avec } N(x,y,z) \text{ et } P(x+dx, y+dy, z+dz)$$

$$V(P) = V(N) + \partial V / \partial x dx + \partial V / \partial y dy + \partial V / \partial z dz$$



$$V(P) - V(N) = \text{grad}(V) \cdot \mathbf{NP} = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{NP}$$

$$\mathbf{E}_d = -q \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{NP} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0$$

II.5 Le dipôle s'aligne avec le champ

Dans le cas où le dipôle est dans le sens opposé au champ la position est une position d'équilibre instable. Il s'alignera sur le champ en tournant d'un côté ou de l'autre.

II.6 a) Le dipôle se place suivant $\mathbf{e}_r$ et se déplace vers les champs les plus intenses c'est à dire se rapproche de la charge.

II.6 b) Le dipôle reste orienté suivant $\mathbf{e}_r$ et se déplace vers les champs les plus intenses c'est à dire se rapproche de la charge.

$$\text{II.7 } \mathbf{F} = p_0 \partial \mathbf{E} / \partial r \quad \text{avec } \mathbf{E} = Q \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2 \quad \partial \mathbf{E} / \partial r = -2 Q \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^3 \quad \mathbf{F} = -p_0 Q \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^3$$

Le dipôle se déplace suivant $-\mathbf{e}_r$ il va donc bien vers O.

III Applications

III.1) L'unité est le Debye qui n'est pas une unité du système international.

$$\text{III.2) } p = 2,3 + 0,4 \cos(58^\circ) = 2,72 \text{ D}$$

$$\text{III.3 a) } Q \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\text{III.3 b) } \mathbf{E}_{\text{ion-dipôle}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -Q p \cos \varphi / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\text{III.3 c) } \text{Pour } \varphi = 0 \quad \cos \varphi = 1 ; \mathbf{R} = -2 Q p \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^3$$

Le dipôle est bien attiré par la charge.

III.4 a) Le dipôle s'oriente suivant le champ et se déplace vers les champs les plus intenses c'est à dire se rapproche du dipôle.

$$\text{III.4 b) } \mathbf{E}_{\text{dipôle1-dipôle2}} = -\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{E}_1 = (3 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{p}_2 / 4\pi\epsilon_0 r^3 = (3 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{e}_r) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{e}_r) - (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)) / 4\pi\epsilon_0 r^3$$

$$\mathbf{E}_{\text{dipôle1-dipôle2}} = p^2 (3 \cos \theta \cos(\psi - \theta) - \cos(\psi)) / 4\pi\epsilon_0 r^3$$

Les 2 termes composant cette somme varient indépendamment l'un de l'autre. L'énergie sera minimale lorsque les 2 termes de la somme seront négatifs et le plus grand possible en valeur absolue.

Soit $\cos(\psi) = 1$ donc $\psi = 0$ et donc $\cos^2 \theta = 1$ soit $\theta = 0$ ou π .

Dans les 2 cas le dipôle est aligné sur le champ.

III.5 a) La figure 5 proposée convient très bien.

III.5 b) Répulsive le dipôle a tendance à se déplacer vers les énergies potentielles les plus faibles.

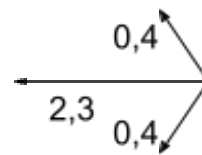
III.5 c) Attractive le dipôle a tendance à se déplacer vers les énergies potentielles les plus faibles soit ici vers les potentiels négatifs c'est à dire vers O.

Le composé est stable (énergie potentielle négative)

Pourquoi pas !

III.5 d) Attractive. Le composé est stable (énergie potentielle négative). Non puisqu'il y a interaction avec la charge mais également entre les dipôles. Une position plus rapprochée des dipôles modifierait certainement le résultat.

III.5 e) Les énergies potentielles pour chaque valeur de a sont plus faibles pour le composé $[\text{I}(\text{NP})_2]^+$ c'est donc lui qui est le plus stable.



Deuxième partie

B Rayonnement dipolaire

B.I Etude du dipôle oscillant

$$\text{B.I.1 } \mathbf{p} = 2a q \cos(\omega t) \mathbf{e}_z = p_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$$

$$\text{B.I.2 a) } Q \text{ est animée d'un mouvement non relativiste } 2a\omega \ll c \quad 2a \cdot 2\pi \ll cT = \lambda \quad a \ll \lambda$$

$$\text{B.I.2 b) } \lambda \in [0,4 \mu\text{m}; 0,8 \mu\text{m}] \text{ en gros.}$$

B.I.3 a) Dans le cas statique $\omega = 0$ et $k = \omega / c = 0$, $\exp(0) = 1$ on retrouve bien le cas statique.

B.I.3 b) L'un décroît en r^2 l'autre en r^{-1} .

B.I.4 Pour les champs lointains le terme $(1 + jkr)$ devient pratiquement égal à jkr

L'expression de $\mathbf{B}$ devient donc $\mathbf{B}(M,t) = \mu_0 \omega^2 p \sin\theta \mathbf{e}_\phi / 4\pi r c$

B.I.5 a) Ici aussi $k=0$ et $\omega = 0$ $(1+jkr-(kr)^2)$ devient 1, p devient p_0 .

On obtient bien l'expression du dipôle.

B.I.5 b) Pour les champs lointains, c'est à l'inverse les termes de plus faible degré en r qui disparaissent.

Le champ devient donc $\mathbf{E}(M,t) = jk p \cos\theta \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2 - k^2 p \sin\theta \mathbf{e}_\theta / 4\pi\epsilon_0 r$

$\mathbf{E}(M,t) = jk p \cos\theta \mathbf{e}_r / 4\pi\epsilon_0 r^2 - \omega^2 p \sin\theta \mathbf{e}_\theta / 4\pi\epsilon_0 r c^2$

$\mathbf{E}(M,t)$ est pratiquement égal à $- k^2 p \sin\theta \mathbf{e}_\theta / 4\pi\epsilon_0 r$ sauf au voisinage de $\theta = 0$.

B.I.6 La condition précédente est réalisée si $2 \cos\theta/r \gg k \sin\theta$ soit $\tan\theta \gg 2/kr = 2cd/\omega r = \lambda/\pi r$

Or dans la suite le domaine de rayonnement est tel que $r \gg \lambda$ donc la condition n'est pas vérifiée seulement au voisinage de $\theta = 0$.

B.II Etude du rayonnement en champ lointain.

B.II.1 a) $\|\mathbf{E}\| / \|\mathbf{B}\| = 1/\epsilon_0 \mu_0 c = c$

B.II.1 b) $\mathbf{k} = \omega / c \mathbf{e}_r$ Le trièdre $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ est orthogonal direct, localement la structure de l'onde est une structure d'onde plane.

$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E})/c = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E})/\omega$

B.II.2 a) $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/\mu_0$

B.II.2 b) $\mathbf{\Pi} = E^2 \mathbf{e}_r / c \mu_0$

B.II.2 c) L'onde se propage radialement suivant $\mathbf{e}_r$

B.II.2 d) Ce sont les rayons lumineux.

B.II.3 $\mathbf{\Pi} = E^2 / c \mu_0 = p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) / 16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 r^2 c^5$

$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta \langle \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \rangle / 16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 r^2 c^5 = p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta / 32\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3$

I est en Watt par mètre carré (Wm^{-2}) le flux de $\mathbf{\Pi}$ est une puissance.

B.II.4 a) I est maximale pour $\theta = \pi/2$ alors $\sin\theta = 1$ et $I_{\max} = p_0^2 \omega^4 / 32\pi^2 \epsilon_0 r^2 c^3$

elle est nulle pour $\theta = 0$

B.II.4 b) $I/I_{\max} = \sin^2\theta$

B.II.5 a) $\mathbf{P} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} I r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ or $\int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$

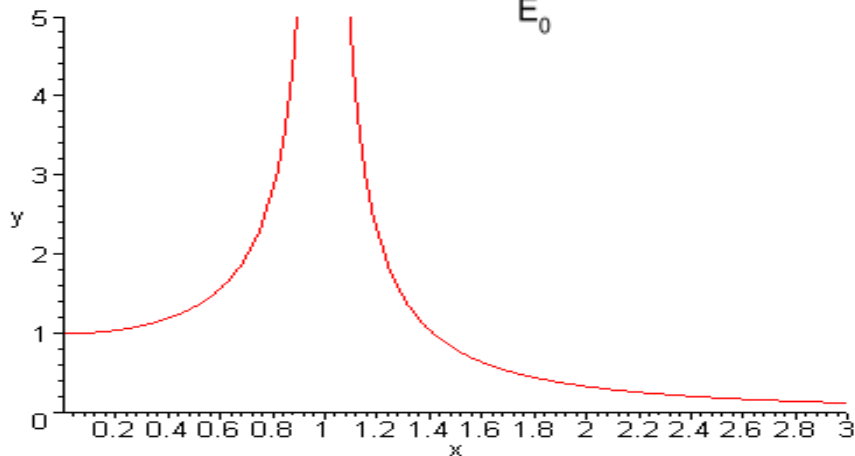
$\mathbf{P} = (8\pi/3) \cdot p_0^2 \omega^4 / 32\pi^2 \epsilon_0 c^3 = p_0^2 \omega^4 / 12\pi^2 \epsilon_0 c^3$ on a donc $\alpha = 1/12\pi^2$

B.II.5 b) Conservation de l'énergie.

La puissance traversant une sphère de rayon R se retrouve un peu plus tard traversant une surface de rayon plus important. Pas de puissance absorbée.

B.II.6 a) $p_0 = q^2 E_0 / m |(\omega_0^2 - \omega^2)|$

$$p_0 m \omega_0^2 / q^2$$



$$\omega / \omega_0$$

B.II.6 b) L'expression ne comporte pas de terme d'amortissement. Il faut tenir compte du fait que l'atome rayonne, d'où une perte d'énergie modélisée par un terme d'amortissement.

B.II.6 c) $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16}$ rad/s et pour le visible $\lambda \in [0,4 \mu\text{m}; 0,8 \mu\text{m}]$ pour $\lambda = 0,4 \mu\text{m}$ $\nu = c/\lambda = 7,5 \cdot 10^{14}$ Hz

$\omega = 4,7 \cdot 10^{15}$ rad/s $\omega_0 / \omega \approx 5$ on va donc pouvoir négliger ω^2 devant ω_0^2 .

B.II.6 d) $P = p_0^2 \omega^4 / 12 \pi^2 \epsilon_0 c^3 = q^4 E_0^2 \omega^4 / 12 \pi^2 m^2 \omega_0^4 \epsilon_0 c^3$

B.II.6 e) Les ondes de plus grande fréquence émises par le soleil sont diffusées par les molécules de l'atmosphère. Ce sont ces ondes réémises que l'on peut observer et qui donne son aspect bleu (courtes longueurs d'onde) au ciel. Cette lumière est polarisée et moins intense en haute altitude (le ciel paraît plus sombre).

B.II.6 f) La lumière directe (transmise) est débarrassée de ses plus courtes longueurs d'onde elle apparaît donc rouge.

B.II.6 g) Le phénomène qui apparaît alors est plus complexe ; diffusion par des particules de grande taille, interférences entre les ondes réémises, réfraction, dispersion.

III Amortissement de l'intensité électromagnétique.

III.1) $u_e(t) = \epsilon_0 E^2 / 2$ $u_m(t) = B^2 / 2 \mu_0$

$B = E/c$ $u_e(t) = u_m(t)$ les deux densités sont égales.

III.2) $u_e(t) = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) / 2$ $u_m(t) = B_0^2 \cos^2(\omega t - kz) / 2 \mu_0$

$$u(t) = u_e(t) + u_m(t) = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) / 2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\langle u(t) \rangle = \epsilon_0 E_0^2 / 2$$

III.3) $\Pi = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) / \mu_0 = E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \mathbf{e}_z / c \mu_0 = u(t) \mathbf{e}_z / c \mu_0 \epsilon_0 = c u(t) \mathbf{e}_z$

III.4) L'énergie se propage suivant Oz.

III.5.a) $P_{\text{inst}} = \Pi S = c S u(t) = c S \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$

$$P_{\text{moy}} = c S \epsilon_0 E_0^2 / 2$$

III.5.b) $I = P_{\text{moy}} / S = c \epsilon_0 E_0^2 / 2$

III.6) L'énergie contenue dans un volume V vaut : $E = \iiint_V u(t) d\tau$ par unité de temps il rentre

$$P_{\text{entr}} = \frac{d}{dt} \iiint_V u(t) d\tau$$

La puissance sortant de ce volume (énergie sortant par unité de temps) vaut : $P_{\text{sort}} = \iint_S \Pi \cdot d\mathbf{s}$

$$\text{d'où } \operatorname{div}(\mathbf{\Pi}) + \frac{\partial}{\partial t} u(t) = 0$$

$$\langle \operatorname{div}(\mathbf{\Pi}) \rangle = \operatorname{div} \langle \mathbf{\Pi} \rangle = - \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u(t) \right\rangle = 0 \text{ car on prend la valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale.}$$

$$\text{III.7.a) } S I(z) = p_d S dz + S I(z + dz)$$

$$p_d = - dI/dz$$

$$\text{III.7.b) } p_d(z) = I(z)/h(\omega) = - dI/dz$$

$$dI/dz + I(z)/h(\omega) = 0$$

$$\text{III.7.c) } I(z) = I_0 \exp(-z/h(\omega))$$

III.7.d) $h(\omega)$ est exprimé en m, c'est la distance de pénétration de l'onde

dans le milieu, distance au bout de laquelle l'intensité de l'onde a été divisée par e.

$$\text{III.7.e) } P_0 V = nRT \quad N_v \text{ est la densité particulaire } N_v = (\text{nombre de particules dans } V)/V$$

$$N_v = n N_{av}/V = P_0 N_{av}/RT = 2,5 \cdot 10^{25}$$

$$\text{III.7.f) } I(h)/I_0 = \exp(-h/h(\omega)) = 0,5$$

$$h = h(\omega) \ln(2) = 6 \pi m^2 \omega_0^4 \epsilon_0^2 c^4 \ln(2) / N_v q^4 \omega^4$$

$$h_{50\%}(\omega_{\text{bleue}}) = 2,4 \cdot 10^5 \text{ m}$$

$$h_{50\%}(\omega_{\text{rouge}}) = 3,84 \cdot 10^6 \text{ m}$$

On retrouve que le bleu passe moins bien que le rouge.

III.7.g) L'atmosphère n'est pas homogène.

Elle contient de la vapeur d'eau du CO_2 , des particules

