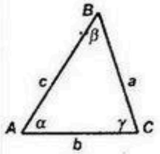
ТРЕУГОЛЬНИК



Сумма внутренних углов :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

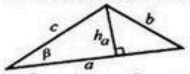
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Величина внешнего угла :

$$\alpha_1 = \beta + \gamma,\quad \beta_1 = \alpha + \gamma,\quad \gamma_1 = \alpha + \beta$$

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

(R - радиус описанной окружности).

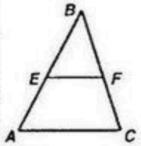


$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Периметр : $2p = a + b + c$

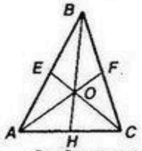
$$S = \frac{1}{2}ah_a \qquad S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad S = \frac{abc}{4R},\ S = pr$$



Свойства средней линии:

$[EF] \parallel [AC],\quad EF = \frac{1}{2}AC$



Свойства медиан:

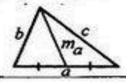
$$OF = \frac{1}{3}AF,\ OE = \frac{1}{3}CE$$

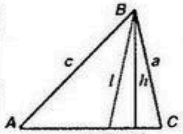
$$OH = \frac{1}{3}BH.$$

Медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Длина медианы

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$$





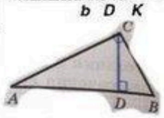
Свойства биссектрис :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}. \qquad \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}.$$

Свойства высот :

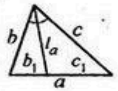
$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$



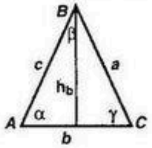
Длина биссектрисы

$$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$$

$$l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

$$S = \frac{a^2\sin\beta}{2}.$$

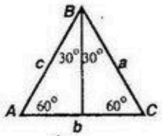


РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

$M = H = L = a\sqrt{3}/2,$

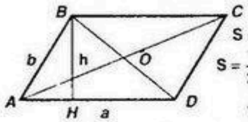
$R = a\sqrt{3}/3,\ r = a\sqrt{3}/6$

$S = a^2\sqrt{3}/4.$



ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Свойства сторон и углов: $\angle BAD + \angle ADC = \pi$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AD \parallel BC$, $AD = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$, *Свойства диагоналей:* $AO = OC$, $BO = OD$, $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$.

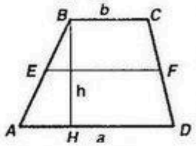


Площадь:

$S = ah,\ S = ab\sin\alpha,$

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\angle AOB$$

ТРАПЕЦИЯ



Свойства сторон :

$AD \parallel BC$,

Средняя линия :

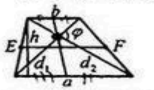
$EF \parallel AD,\ EF = (a+b)/2.$

Площадь :

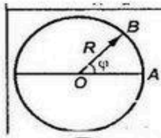
$S = (a+b)h/2,\ S = EF \cdot h.$

d_1, d_2 – диагонали

$$S = \frac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$$



ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

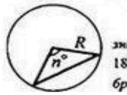


Длина окружности, $l = 2\pi R$;

Площадь, $S = \pi R^2$,

Длина дуги $l_{AB} = 2\pi R \cdot \varphi / 360$,

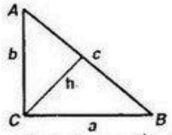
Площадь, $S_{OAB} = \pi R^2 \cdot \varphi / 360$.



$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm \frac{1}{2}R^2\sin n^\circ$$

знак «+» надо брать, когда $180^\circ < n^\circ < 360^\circ$, а знак «–» надо брать, когда $0^\circ < n^\circ < 180^\circ$.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



Теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta$$

Радиус вписанной окружности:

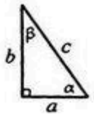
$$r = \frac{ab}{a+b+c}, \qquad r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$m_c = \frac{c}{2},\ R = \frac{c}{2},\ S = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{c};\quad \cos\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{a}{b};\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

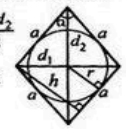
Если $\beta = 30^\circ$, то $c = 2a$.



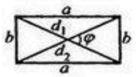
Ромб *(h – высота, d_1, d_2 – диагонали)*

$$r = \frac{h}{2} = \frac{d_1d_2}{4a};\quad S = \frac{d_1d_2}{2}$$

$$S = ah = 2ar = a^2\sin\alpha$$



Прямоугольник

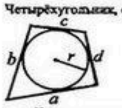


$$S = ab = \frac{d^2\sin\varphi}{2}$$

Произвольный четырёхугольник

$$S = \frac{d_1d_2\sin\varphi}{2}$$

Четырёхугольник, описанный около окружности



$$a + c = b + d$$

$$S = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$$

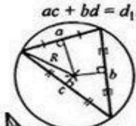
Четырёхугольник, вписанный в окружность

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

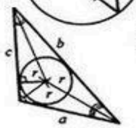
Теорема Птолемея

$$ac + bd = d_1d_2$$



Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

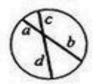


Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

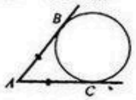
$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих

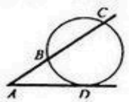
1. $ab = cd$



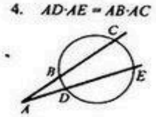
2. $AB = AC$



3. $AD^2 = AB \cdot AC$



4. $AD \cdot AE = AB \cdot AC$



Некоторые свойства вписанных углов:

1. *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу; (вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается).*

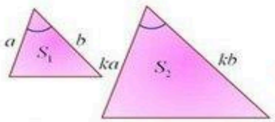
$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}l$$

2. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.*

3. *Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые*

Площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей *(a – сторона, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности).*

	r	R	S
треугольник	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
шестиугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
n- угольник	$\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$



Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Углы треугольников равны, поэтому по предыдущей теореме получаем

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \cdot b}{ka \cdot kb} = \frac{1}{k^2}$$

Сборник формул

Степени

$a^0=1$

$(ab)^n=a^n b^n$

$a^n\cdot a^k=a^{n+k}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}$

$\left(a^n\right)^k=a^{nk}$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

Корни

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}=a^{\frac{k}{n}}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

Сокращенное умножение

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Квадратный трехчлен

квадратное уравнение

$ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ или $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

где $D=b^2-4ac$ (D — дискриминант)

формулы Виета

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

разложение трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

Логарифмы

основные тождества

$a^{\log_a x}=x\ \ (x>0)$

$\log_a a^x=x$

десятичный логарифм

$\log_{10}b=\lg b$

натуральный логарифм

$\log_e b=\ln b$

$e\approx 2{,}7$

свойства логарифмов

$\log_a b=c\ \Leftrightarrow\ b=a^c$

$\log_a(b\cdot c)=\log_a b+\log_a c$

$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$

$\log_a c=\frac{\log_b c}{\log_b a}$

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$\log_{a^k}b=\frac{1}{k}\log_a b$

$\log_{a^k}b^n=\frac{n}{k}\log_a b$

$\log_a b^n=n\cdot\log_a b$

Тригонометрия

основные тождества

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

простейшие тригонометрические уравнения

а) $\sin x=a,\ a\in[-1;1]$

$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$

частные случаи:

$\sin x=-1$ $\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\sin x=0$ $\quad x=\pi n$

$\sin x=1$ $\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

б) $\cos x=b,\ \ b\in[-1;1]$

$x=\pm\arccos b+2\pi k\ \ (k\in Z)$

частные случаи:

$\cos x=-1$ $\quad x=\pi+2\pi k$

$\cos x=0$ $\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\cos x=1$ $\quad x=2\pi k$

в) $\operatorname{tg}x=c,\ \ c\in(-\infty;\infty)$ $\quad x=\operatorname{arctg}c+\pi m\ \ (m\in Z)$

г) $\operatorname{ctg}x=d,\ \ d\in(-\infty;\infty)$ $\quad x=\operatorname{arcctg}x+\pi l\ \ (l\in Z)$

некоторые значения тригонометрических функций

Угол / Ф-ция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

формулы приведения

Угол / Ф-ция	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2}\pm\varphi$	$\pi\pm\varphi$	$\frac{3}{2}\pi\pm\varphi$	$2\pi\pm\varphi$
sin	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$
cos	$\cos\varphi$	$\mp\sin\varphi$	$-\cos\varphi$	$\pm\sin\varphi$	$\cos\varphi$
tg	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\mp\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$	$\mp\operatorname{ctg}\varphi$	$\pm\operatorname{tg}\varphi$
ctg	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\mp\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$	$\mp\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\operatorname{ctg}\varphi$

сумма и разность углов

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$

формулы двойного и тройного аргумента

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$

формулы половинного аргумента

$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$; $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$; $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

сумма и разность тригонометрических функций

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

произведение тригонометрических функций

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$