

ТРЕУГОЛЬНИК

Сумма внутренних углов:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

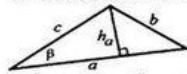
Величина внешнего угла:

$$\alpha_1 = \beta + \gamma, \beta_1 = \alpha + \gamma, \gamma_1 = \alpha + \beta$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(R - радиус описанной окружности).

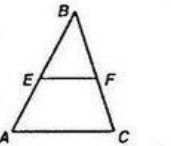


$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Периметр: $2p = a + b + c$

$$S = \frac{1}{2} ah_a, S = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, S = \frac{abc}{4R}, S = pr$$



Свойства средней линии:

$$[EF] \parallel [AC], EF = \frac{1}{2} AC$$

Длина медианы

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$



Медианы пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Свойства биссектрис:

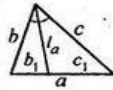
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}, \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}.$$

Свойства высот:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}, AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$



Длина биссектрисы

$$l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$$

$$l_a = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{b+c}$$

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

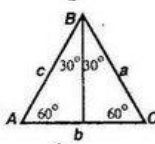
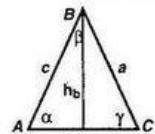
$$S = \frac{a^2 \sin \beta}{2}$$

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

$$M = H = L = a\sqrt{3}/2,$$

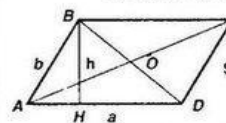
$$R = a\sqrt{3}/3, r = a\sqrt{3}/6$$

$$S = a^2\sqrt{3}/4.$$

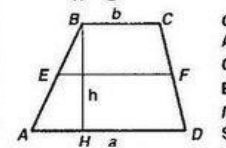


ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Свойства сторон и углов: $\angle BAD + \angle ADC = \pi$, $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $AD \parallel BC$, $AD = BC$, $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$. Свойства диагоналей: $AO = OC$, $BO = OD$, $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$.



Площадь: $S = ah$, $S = ab \sin \alpha$, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \angle AOB$

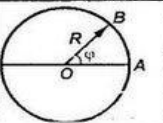
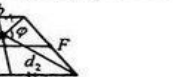
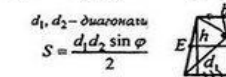


ТРАПЕЦИЯ

Свойства сторон: $AD \parallel BC$.

Средняя линия: $EF \parallel AD$, $EF = (a+b)/2$.

Площадь: $S = (a+b)h/2$, $S = EF \cdot h$.



ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

Длина окружности, $l = 2\pi R$;

Площадь, $S = \pi R^2$,

Длина дуги $l_{AB} = 2\pi R \cdot \varphi / 360$,

Площадь, $S_{OAB} = \pi R^2 \cdot \varphi / 360$.

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n^\circ \pm \frac{1}{2} R^2 \sin n^\circ$$

знак «+» надо брать, когда $180^\circ < n^\circ < 360^\circ$, а знак «-» надо брать, когда $0^\circ < n^\circ < 180^\circ$.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

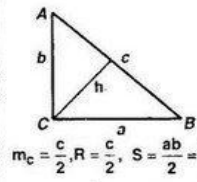
Теорема Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{ctg} \beta$$

Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{ab}{a+b+c}, r = \frac{a+b-c}{2}$$



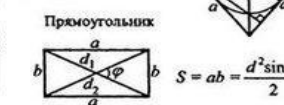
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Если $\beta = 30^\circ$, то $c = 2a$.

Ромб (h - высота, d_1, d_2 - диагонали)

$$r = \frac{h}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}, S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

$$S = ah = 2ar = a^2 \sin \alpha$$



Прямоугольник

$$S = ab = \frac{d^2 \sin \varphi}{2}$$



Произвольный четырехугольник

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

Четырехугольник, описанный около окружности

$$a + c = b + d, S = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$$

Четырехугольник, вписанный в окружность

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Теорема Птолемея

$$ac + bd = d_1 d_2$$

Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров.

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Центр вписанной окружности - точка пересечения биссектрис.

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$



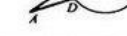
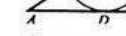
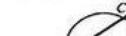
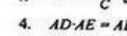
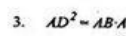
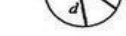
Соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих

$$1. ab = cd$$

$$2. AB = AC$$

$$3. AD^2 = AB \cdot AC$$

$$4. AD \cdot AE = AB \cdot AC$$



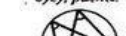
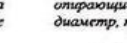
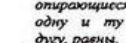
Некоторые свойства вписанных углов:

1. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: (вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается).

$$\alpha = \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} l$$

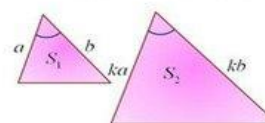
2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

3. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.



Площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей (a - сторона, r - радиус вписанной окружности, R - радиус описанной окружности).

	r	R	S
треугольник	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
квадрат	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	a^2
прямоугольник	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
n-угольник	$\frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a^2 n}{4 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$



Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия.

Углы треугольников равны, поэтому по предыдущей теореме получаем

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a \cdot b}{ka \cdot kb} = \frac{1}{k^2}$$

Сборник формул

Степени

$$a^0 = 1 \quad (ab)^n = a^n b^n \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \quad (a^n)^k = a^{nk} \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

Корни

Сокращенное умножение

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Квадратный трехчлен

квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ формулы Виета

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{или} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

где $D = b^2 - 4ac$ (D — дискриминант) $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

разложение трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

Логарифмы

основные тождества $a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$ свойства логарифмов

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

$$\log_a a^x = x \quad \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

десятичный логарифм $\log_{10} b = \lg b$ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

натуральный логарифм $\log_e b = \ln b$ $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$e \approx 2,7$$

$$\log_a b^k = \frac{1}{k} \log_a b \quad \log_a b^n = n \log_a b$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Тригонометрия

основные тождества

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

простейшие тригонометрические уравнения

а) $\sin x = a, \quad a \in [-1; 1] \quad$ б) $\cos x = b, \quad b \in [-1; 1]$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad x = \pm \arccos b + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

частные случаи:

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k$$

$$\sin x = 0 \quad x = \pi n \quad \cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \cos x = 1 \quad x = 2\pi k$$

в) $\operatorname{tg} x = c, \quad c \in (-\infty; \infty) \quad x = \arctg c + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$

г) $\operatorname{ctg} x = d, \quad d \in (-\infty; \infty) \quad x = \operatorname{arccotg} d + \pi l \quad (l \in \mathbb{Z})$

некоторые значения тригонометрических функций

Угол Ф-ция	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

формулы приведения

Угол Ф-ция	$-\varphi$	$\frac{\pi}{2} \pm \varphi$	$\pi \pm \varphi$	$\frac{3}{2}\pi \pm \varphi$	$2\pi \pm \varphi$
$\sin$	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm \sin \varphi$
$\cos$	$\cos \varphi$	$\mp \sin \varphi$	$-\cos \varphi$	$\pm \sin \varphi$	$\cos \varphi$
tg	$-\operatorname{tg} \varphi$	$\mp \operatorname{ctg} \varphi$	$\pm \operatorname{tg} \varphi$	$\mp \operatorname{ctg} \varphi$	$\pm \operatorname{tg} \varphi$
ctg	$-\operatorname{ctg} \varphi$	$\mp \operatorname{tg} \varphi$	$\pm \operatorname{ctg} \varphi$	$\mp \operatorname{tg} \varphi$	$\pm \operatorname{ctg} \varphi$

сумма и разность углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

формулы двойного и тройного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$$

формулы половинного аргумента

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

произведение тригонометрических функций

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

Videor-repetitor.ru

Postupim.ru