

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Epreuve PC Physique 1 - 2001

Problème I – Formation de neige artificielle

I- Changement de phase solide-liquide des corps

1. Zone 1 : solide ; zone 2 : liquide ; zone 3 : vapeur.

Point X : point critique ; si l'on contourne le point critique, il n'est plus possible d'observer simultanément les deux phases liquide et vapeur puisque les propriétés physiques qui les caractérisent varient de façon continue. On ne peut plus distinguer la phase liquide de la phase vapeur. On parle de fluide.

Point Y : point triple ; pour la pression et température du point triple, il y a coexistence des trois phases solide, liquide et vapeur.

courbe sY : sublimation – condensation

courbe Yf : fusion – solidification

courbe XY : vaporisation – liquéfaction

2. $\Delta s = s_2 - s_1$; sur un chemin réversible entre l'état 1 et l'état 2 à p et T constantes, on a : $\Delta s = Q_{p,rév}/T$.

Or $Q_{p,rév} = \Delta h = h_2 - h_1$. D'où : $L_{12} = T\Delta s = T(s_2 - s_1)$ (1)

3. Par définition (en grandeur massique): $g = h - Ts$ (2). Donc $g_{12} = g_2 - g_1$, soit avec (2) $g_{12} = (h_2 - Ts_2) - (h_1 - Ts_1)$
En utilisant (1), on trouve : $g_{12} = 0$. Le changement de phase réversible d'un corps pur se fait à enthalpie libre constante.

4. On a : $dg = v.dp - s.dT$.

Avec la question 3, on a : $dg_1 = dg_2$, soit $v_1.dp - s_1.dT = v_2.dp - s_2.dT$. D'où $\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1}$

Avec la relation (1), on trouve la relation de Clapeyron : $\frac{dp}{dT} = \frac{L_{12}}{T_0(v_2 - v_1)}$

5. $\frac{dp}{dT} = \frac{L_f}{T(v_{liq} - v_{sol})}$. Or $d = \rho_{sol}/\rho_{liq}$, soit $d = v_{liq}/v_{sol}$. D'où $\frac{dp}{dT} = \frac{L_f}{T.v_{liq}(1 - 1/d)}$.

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_T = -1,35.10^7 \text{ Pa.K}^{-1}$$

A.N. avec $v_{liq} = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$ à $T = 273 \text{ K}$,

Le diagramme proposé n'est pas celui de l'eau car la pente de la courbe Yf est positive. Or le calcul ci-dessus montre que la pente de cette courbe est négative.

6. La courbe solide – liquide passe par le point triple de coordonnées (T_{tr}, P_{tr}) .

D'où en assimilant cette courbe à une droite, $\left(\frac{dp}{dT}\right)_T$ est constant, d'où : $p - P_{Tr} = \left(\frac{dp}{dT}\right)_T (T - T_{Tr})$ (3)

7. Température de changement de phase sous 500 bars : $p = 500 \text{ bars}$, avec (3), on trouve : $T = -3,70 \text{ °C}$

Si l'échauffement a lieu à une pression inférieure à P_{tr} , on obtient de la vapeur (phénomène de sublimation).

8. La pente de la courbe $g_l(T)$ est plus négative que celle de $g_s(T)$, d'où : $\frac{dg_l}{dT} < \frac{dg_s}{dT}$.

Or à $p = \text{cst}$, $dg = -s.dT$, soit $dg_l = -s_l.dT$ et $dg_s = -s_s.dT$, d'où en remplaçant dans la relation précédente, on trouve : $s_l > s_s$
On observe donc bien une diminution d'entropie lorsque le degré d'organisation de la matière augmente.

9. Surfusion : c'est un état métastable de la matière ; C'est un liquide refroidi à une température inférieure à sa température de solidification, qui reste dans son état liquide.

I- Germination : Modèle de Volmer

1. Dans l'état 1, on a : $G_1 = mg_l$.

$$G_2 = \left(m - \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{v_s} \right) g_l + \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{v_s} g_s + \sigma 4\pi r^2$$

2. Dans l'état 2, on a :

(Remarque : ne faut-il pas ajouter $-\sigma A$ à l'enthalpie libre plutôt que σA ?)

3. $\Delta G_{12} = G_2 - G_1$ soit
$$\Delta G_{12} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{v_s} (g_s - g_l) + \sigma 4\pi r^2 \quad (4)$$

4. Pour $T = T_f$, $g_l = g_s$. Donc $\Delta G_{12} = \sigma 4\pi r^2$. On obtient une parabole.

Pour $T < T_f$, $g_l > g_s$. Donc le coefficient de r^3 dans (4) est négatif. La phase de germination ne peut se poursuivre que si il y a

une diminution de ΔG_{12} . ΔG_{12} est une fonction décroissante à partir de la valeur r_{critique} tel que $\frac{\partial \Delta G_{12}}{\partial r} = 0$

$$r_{\text{critique}} = \frac{2\sigma v_s}{(g_l - g_s)}$$

soit à partir de (4) :

5. La valeur de r_{critique} est liée à la différence des enthalpies libres massiques. La germination est d'autant plus facile que r_{critique} est petit, donc que $(g_l - g_s)$ est grand, soit $T < T_f$. Il faut donc bien que la surfusion soit importante.

III- Fabrication de neige artificielle – canon à neige

1. Système : goutte indéformable de rayon R.

On effectue un bilan énergétique: $dU = \delta Q + \delta W$ (5) où δQ et δW représentent respectivement le transfert thermique et le travail reçus par la goutte.

La goutte est indéformable, il n'y a donc pas de travail des forces de pression : $\delta W = 0$ (6).

Transfert thermique reçue durant dt par une surface dS sur la surface de la goutte : $\delta^2 Q = -d\Phi \cdot dt$ avec $d\Phi$ le flux «élémentaire» sortant (notation de l'énoncé),

d'où : $\delta^2 Q = -h \cdot (T(t) - T_e) dS \cdot dt$, soit pour toute la surface de la goutte : $\delta Q = -h \cdot (T(t) - T_e) \cdot dt \cdot 4\pi R^2$ (7)

La variation élémentaire de l'énergie interne durant dt s'écrit : $dU = \rho \cdot c_l \cdot (4/3)\pi R^3 \cdot dT$ (8)

$$\rho c_l R \frac{dT}{dt} = -3h [T(t) - T_e] \quad (8)$$

En injectant les équations (6), (7) et (8) dans (5), on trouve :

2. A partir de (8), on obtient $\frac{dT}{[T(t) - T_e]} = -\frac{3h}{\rho c_l R} dt$, soit $\ln(T(t) - T_e) = -\frac{t}{\tau} + \text{cst}$ avec $\tau = \frac{\rho c_l R}{3h}$.
A $t = 0$, $T(0) = T_i$, d'où $\text{cst} = \ln(T_i - T_e)$.

$$\frac{T(t) - T_e}{T_i - T_e} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

d'où l'expression demandée :

$$t_0 = \tau \ln \left(\frac{T_i - T_e}{T(t_0) - T_e} \right)$$

Temps t_0 mis par la goutte d'eau pour atteindre la température de surfusion : A.N. : $t_0 = 3,92$ s.

3. La transformation est adiabatique. Le transfert thermique lié à la solidification de la fraction $(1 - x)$ du liquide sert à chauffer la fraction x de liquide restant et la fraction $(1 - x)$ de solide de $T(t_0) = -5^\circ \text{C}$ à $T_1 = 0^\circ \text{C}$, d'où la relation suivante :
 $(1 - x) L_f = [(1 - x)c_s + x \cdot c_l] \cdot [T_1 - T(t_0)]$ d'où $x = 0,94$.

4. Soit Δt le temps de solidification du reste de la goutte. On a : $\rho(4/3)\pi R^3 \cdot x \cdot L_f = h \cdot 4\pi R^2 \cdot [T_1 - T_e] \cdot \Delta t$

$$\Delta t = \frac{\rho R x L_f}{3h [T_1 - T_e]} \quad \text{A.N. : } \underline{\Delta t = 21,4 \text{ s.}}$$

5. Il existe un gradient de pression partielle de vapeur d'eau entre la surface de la goutte et l'air. D'où le phénomène de diffusion (loi de Fick) des molécules d'eau de la goutte vers l'extérieur.

Problème II – Etude d’une turbine Pelton

I. Questions préliminaires

1. $\frac{D\vec{V}}{Dt}$: dérivée particulière, c’est à dire en suivant la particule au cours de son déplacement (description d’Euler)

On a : $\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$. En utilisant les coordonnées cartésiennes pour la vitesse $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$, on a :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial t} \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

2. Permanent : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (a). Toutes les dérivées partielles par rapport au temps sont nulles. Les fonctions ne dépendent pas explicitement du temps.

incompressible : $\rho = \text{cste}$ (b). La masse volumique est constante.

On utilise l’équation d’un fluide en mouvement pour un écoulement parfait : $\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g}$ dans laquelle on

injecte la relation proposée, d’où : $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + \text{rot } \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{g}$ (1)

Avec l’hypothèse (a), le premier terme disparaît.

Avec l’hypothèse (b), on peut rentrer ρ dans le gradient de pression.

Avec z, axe vertical ascendant, on peut écrire : $\vec{g} = -\text{grad}(gz)$;

d’où (1) s’écrit : $\text{grad} \left(p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho gz \right) = \rho \vec{V} \wedge \text{rot } \vec{V}$

3. Ecoulement irrotationnel : $\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$. On en déduit le théorème de Bernoulli : $p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho gz = \text{cst}$

Pour l’écoulement rotationnel : $\text{rot } \vec{V} \neq \vec{0}$, le théorème de Bernoulli n’est valable que sur une ligne de courant, avec la même constante.

Exemple d’écoulement rotationnel : tourbillon.

4. Signification physique du terme : énergie totale volumique.

5. On utilise le théorème de l’énergie mécanique pour un volume élémentaire de fluide : $P_h = \frac{dE}{dt}$.

Avec la quantité H, $dE = H \rho g d\tau$, d’où : $P_h = \frac{H \rho g \cdot d\tau}{dt}$ où $\frac{d\tau}{dt}$ représente le débit volumique Q_v .

D’où $P_h = H \rho g Q_v$.

II. Turbine Pelton

1. $\underline{dm = \rho Q_v dt}$ et $\underline{Q_v = Q_v - U S}$.

II.1 Composition des vitesses : $\vec{V}_1 = \vec{W}_1 + \vec{U}$ et $\vec{V}_2 = \vec{W}_2 + \vec{U}$.

II.2 Moment cinétique élémentaire de la masse de fluide dm entrant, exprimé dans le référentiel de l'auget :

$$d\vec{\sigma}_{\text{entrant}} = R \vec{U}_r \wedge \vec{W}_1 dm$$

De même pour la masse élémentaire de fluide dm sortant de l'auget : $d\vec{\sigma}_{\text{sortant}} = R \vec{U}_r \wedge \vec{W}_2 dm$

(un erratum concernant le signe du couple a été communiqué aux candidats au début de l'épreuve. Cependant cet erratum est erroné et non justifié !!)

II.3 Théorème du moment cinétique appliqué à la masse de fluide : $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_{\text{sortant}} - d\vec{\sigma}_{\text{entrant}}}{dt} = \vec{\Gamma}$

avec $\vec{\Gamma}$ moment et couple des actions extérieures exercées par la roue sur le fluide. Donc $\vec{\Gamma} = -\vec{C}$.

$$\vec{C} = \rho Q_{rv} R \vec{U}_r \wedge (\vec{W}_1 - \vec{W}_2) \quad (2).$$

D'où avec $dm/dt = \rho Q_{rv}$, on a :

II.4 On utilise le théorème de Bernoulli en mouvement relatif, avec $z = \text{cst}$ (néglige les variations d'altitude sur l'auget) et $p_a = 0$:

$$W_1^2 = W_2^2 \quad \text{soit} \quad \left| \vec{W}_1 \right| = \left| \vec{W}_2 \right|$$

$$\vec{U} \wedge \vec{W}_1 = W_1 \vec{y}, \quad \vec{U} \wedge \vec{W}_2 = W_2 \cos \beta \vec{y} = W_1 \cos \beta \vec{y} \quad \text{et} \quad W_1 = V_1 - U, \quad \text{on injecte dans (2), on trouve alors la relation}$$

demandée : $\vec{C} = \rho R S (V_1 - U)^2 (1 - \cos \beta) \vec{y}$.

Justification du signe de $\vec{C}$: $\vec{C}$ ne peut être que positif ou nul !!

II.5 Puissance mécanique cédée par le fluide à la roue motrice : $P_m = \vec{C} \cdot \vec{\omega}$

soit : $P_m = \rho R S \omega (V_1 - U)^2 (1 - \cos \beta)$

II.6 On utilise à nouveau le théorème de Bernoulli entre le réservoir et la sortie de l'injecteur :

$$p_a + \frac{1}{2} \rho V_0^2 + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho V_1^2 + 0 \quad . \text{ Or à la surface libre du réservoir, } V_0^2 \text{ est négligeable.}$$

On a alors : $V_1 = \sqrt{2gh}$ (formule de Torricelli)

On a : $P_h = H \rho g Q_v$. Pour calculer H , on peut se placer en $z = 0$ ou en $z = h$. On trouve alors $H = h$.

D'où : $P_h = h \rho g Q_v$

3 Rendement hydraulique : $\eta = \frac{P_m}{P_h}$, d'où en remplaçant : $\eta = \frac{R \omega (V_1 - U)^2 (1 - \cos \beta)}{gh V_1}$,

d'où avec $gh = V_1^2 / 2$, $R\omega = U$ et $x = U/V_1$: $\eta = 2x(1-x)^2(1-\cos\beta)$

Rendement maximum :

$$\cos \beta = -1, \text{ soit } \underline{\beta = \pi}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{x = 1/3} \text{ alors } \underline{\eta = 16/27}$$

- 4 Pour obtenir le couple exercé par le fluide sur l'ensemble de la roue mobile, on remplace Q_{vr} par Q_v , d'où la relation :

$$\vec{C} = \rho Q_v R (V_1 - U)(1 - \cos \beta) \vec{y}$$

- 5 En utilisant les mêmes relations que pour la question 3, on trouve : $\eta = 2x(1-x)(1 - \cos \beta)$

Rendement maximum :

$$\cos \beta = -1, \text{ soit } \beta = \pi$$

$$\frac{d\eta}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{dx} = 0, \text{ soit } x = 1/2 \text{ alors } \eta = 1$$

On ne peut pas avoir $\beta = \pi$, car le fluide retournerait sur l'auget suivant, ce qui diminuerait la puissance récupérée.

Rendement total inférieur : on a négligé la viscosité du fluide, les frottements mécaniques, les forces de pression.

6 $V_1 = \sqrt{2gh}$, soit $V_1 = 76.7 \text{ ms}^{-1}$

$$N = 208 \text{ tours/minute d'où la vitesse de rotation } \omega : \omega = \frac{N \cdot 2\pi}{60}, \text{ soit } \omega = 21,8 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } U = 21,8 \text{ m.s}^{-1}$$

donc avec $x = U/V_1$, on trouve $x = 0,28$.

$$P_h = \rho g Q_v \text{ et } P_m = \eta P_h, \text{ d'où } P_m = 28,2 \text{ MW}$$

$$\text{Comme } \eta = 0,8 \text{ et } \eta = 2x(1-x)(1 - \cos \beta), \text{ on trouve : } \beta = 165^\circ$$

III. Etude du démarrage et de l'arrêt de la turbine

1. On a $V_1 = R\omega_m$ et $U = R\omega$, donc à partir de la relation du II-4, on a $\vec{C} = \rho Q_v R^2 (\omega_m - \omega)(1 - \cos \beta) \vec{y}$

Equation du mouvement : on utilise le théorème du moment cinétique à l'ensemble mobile, en projection sur l'axe Oy, d'où :

$$\frac{d\sigma}{dt} = C \quad \text{avec } \sigma = I\omega \text{ et } I = KMR^2.$$

$$D'où : I \frac{d\omega}{dt} = \rho Q_v R^2 (\omega_m - \omega)(1 - \cos \beta) \quad \text{soit} \quad \frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = \frac{dt}{T} \quad \text{avec} \quad T = \frac{KM}{\rho Q_v (1 - \cos \beta)}$$

2. On intègre la relation précédente avec à $t = 0, \omega = 0$:
- $$\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m} = e^{-\frac{t}{T}}$$

3. Pour $t = t_1$, on a $\omega = \omega_m/2$, d'où :
- $$\frac{\omega_m - \omega_m/2}{\omega_m} = e^{-\frac{t_1}{T}}, \text{ soit : } t_1 = T \ln 2$$
- A.N. : $T = 8,13 \text{ s}$ et $t_1 = 5,63 \text{ s}$

4. Point de fonctionnement optimal pour le rendement hydraulique ($x = 1/2$)

On a toujours la même solution mais avec une autre condition initiale : $\omega = \omega_m/2$, d'où l'évolution de la vitesse de rotation de

$$\omega = \omega_m \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

l'ensemble mobile au cours du temps :

$$\frac{3}{4} \omega_m = \omega_m \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t_2}{T}} \right) \quad \text{soit } t_2 = T \ln 2 = t_1$$

$\omega_{50\%} = 3\omega_m/4$ d'où :

Emballement de la turbine.

5.1. On trouve facilement que :

$$Q_v = Q_{v0} \left(1 - \frac{t}{T'} \right)$$

5.2. I $\frac{d\omega}{dt} = \rho Q_{v0} \left(1 - \frac{t}{T'} \right) R^2 (\omega_m - \omega) (1 - \cos \beta)$ d'où $\frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = \left(1 - \frac{t}{T'} \right) \frac{dt}{T}$

d'où avec $\omega = \omega_2$ à $t = 0$, on a

$$\ln \left(\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_2} \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{t^2}{2T'} - t \right) \quad \text{soit :} \quad \frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_2} = \exp \left[\frac{1}{T} \left(\frac{t^2}{2T'} - t \right) \right]$$

5.3. On a $\omega_2 = 3\omega_m/4$. Pour T' , $\omega = \omega'$, d'où :

$$\omega_m - \omega' = (\omega_m - \omega_2) \exp \left[\frac{1}{T} \left(\frac{T'^2}{2T'} - T' \right) \right] = \frac{\omega_m}{4} \exp \left(-\frac{T'}{2T} \right)$$

d'où $\frac{\omega_m - \omega'}{\omega_m} = \frac{1}{4} \exp \left(-\frac{T'}{2T} \right)$ ou $\frac{\omega'}{\omega_m} = 1 - \frac{1}{4} \exp \left(-\frac{T'}{2T} \right)$

A.N. : $\frac{\omega_m - \omega'}{\omega_m} = 3,95\%$ ou $\frac{\omega'}{\omega_m} = 0,96$.

ω' est proche de ω_m . Cette situation devient dangereuse.