
Prueba de Acceso a la Universidad

Curso: 2024-2025

Asignatura: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo.
(Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Resolución

Como el nº de máquinas a usar, x, es inversamente proporcional al tiempo necesario, t horas, para realizar el trabajo, entonces 80.1 = tx. Despejando, el tiempo se obtiene que $t = \frac{80}{x}$

Se trata de minimizar el gasto,
$G = 10x + 5tx + 18t \Rightarrow G(x) = 10x + 5.80 + 18\frac{80}{x} = 10x + 400 + \frac{1440}{x}$.

$G'(x) = 10 - \frac{1440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$; $G''(x) = \left(10 - 1440x^{-2}\right)' = 2880x^{-3}$

$G''(12) = 2880.12^{-3} > 0$. Para x = 12 el gasto es mínimo. El tiempo es entonces $t = \frac{80}{12} = 6\ h\ 40\ min$

Respuesta: con 12 máquinas el gasto es mínimo, siendo este $G(12) = 10.12 + 400 + \frac{1440}{12} = 640$ €

P2) Siendo $p(t) = 0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos cos \left(\frac{\pi}{2}t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre
los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$:
(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

Resolución

Para $0 \le t \le 1$, $p'(t) = 2\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cos cos \left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos cos \left(\frac{\pi}{2}t\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[-\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$

$p'(t) = \frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right] = \frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1 + \left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$

$p'(t) = \frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}t\right)\left[3\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1\right] = 0 \Leftrightarrow sen\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$ (o sea, t = 0)

ó

$\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{3} \rightarrow \cos cos \left(\frac{\pi}{2}t\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{\pi}{2}t = \text{arccos}\ arccos \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \rightarrow t' = \frac{2}{\pi}\text{arccos}\ arccos \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cong 0,60$

Para encontrar los valores máximo y mínimo de p(t) en [0, 1] valoramos p(t) en los extremos y en t´:
$p(0) = 0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}0\right)\cos cos \left(\frac{\pi}{2}0\right) = 0,15$ $\quad p(1) = 0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}1\right)\cos cos \left(\frac{\pi}{2}1\right) = 0,15$

$p(t') \cong 0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}0,6082\right)\cos cos \left(\frac{\pi}{2}0,6082\right) \cong 0,535$

El precio mínimo se produce a las 0 horas y al cabo de 1 hora y vale 0,15 € cada kw/h

----

El precio máximo se produce aproximadamente a las 0,6082 horas (36 min 29,3 seg y vale 0,535 € cada kw/h

(b) Calcula el precio medio p de la luz entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo [a, b] (a < b) es: $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (1,25 puntos)

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Resolución

El precio que se pide es

$$p = \frac{1}{1-0}\int_0^1 [0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)]dt = \int_0^1 [0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)]dt$$

Observa que $I = \int [0,15 + sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)]dt = 0,15t + \underbrace{\int sen^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cos\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt}^{I_1}$.

Hallemos I_1 por cambio de variable: $x = \left(\frac{\pi}{2}t\right) \Rightarrow dx = \frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt$. Luego, $cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{2}{\pi}dx$

Sustituyendo, $I_1 = \int x^2 \frac{2}{\pi}dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3} + k = \frac{2x^3}{3\pi} + k = \frac{2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{3\pi} + k$

Por tanto, una primitiva de p(t) es $P(t) = 0,15t + \frac{2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{3\pi}$. Por la regla de Barrow, p = P(1) – P(0)

O sea, $p = 0,15.1 + \frac{2\left(\frac{\pi}{2}1\right)}{3\pi} - \left[0,15.0 + \frac{2\left(\frac{\pi}{2}0\right)}{3\pi}\right] = 0,15 + \frac{2}{3\pi} \cong 0,3622$ por kw/hora

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$\{(m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3\ (m^2 - 3m)x + 3y + 3mz = m + 9\ (3m - m^2)x + my - mz = 0$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Resolución

Matrices de coeficientes y ampliada: $A = (m^2 - 3m\ \ -m\ 2m\ m^2 - 3m\ 3\ 3m\ 3m - m^2\ m\ \ -m)$

$A^* = (m^2 - 3m\ \ -m\ 2m\ 3\ m^2 - 3m\ 3\ 3m\ m + 9\ 3m - m^2\ m\ \ -m\ 0)$

det A =

$|m^2 - 3m\ \ -m\ 2m\ m^2 - 3m\ 3\ 3m\ 3m - m^2\ m\ \ -m| = (m^2 - 3m)m|1\ \ -m\ 2\ 1\ 3\ 3\ \ -1\ m\ \ -1| =$

$= m^2(m - 3)(-3 + 3m + 2m + 6 - 3m - m) = m^2(m - 3)(m + 3) = 0 \Leftrightarrow$ m = 0, m = 3, m = –3

– Si m ≠ 0 ; m ≠ 3, m ≠ –3, det A ≠ 0 y rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Resolvámoslo por el método de Gauss:

$A^* = (m^2 - 3m\ \ -m\ 2m\ 3\ m^2 - 3m\ 3\ 3m\ m + 9\ 3m - m^2\ m\ \ -m\ 0)\ f2 - f1\ f3 + f1\ \ (m^2 - 3m\ \ -m$

que corresponde al

----

sistema

$\{(m^2 - 3m)x - my + 2mz = 3\ (3 + m)y + mz = m + 6\ mz = 3 \to z = \frac{3}{m}\ \Rightarrow \{(m^2 - 3m)x - my + 2m$

Sustituyendo en la 1ª ecuación, $(m^2 - 3m)x - m.1 + 2m\frac{3}{m} = 3\,;\ (m^2 - 3m)x = m - 3 \to x = \frac{1}{m}$

La solución es $x = \frac{1}{m},\ \ y = 1,\ \ z = \frac{3}{m}$

– Si m = 0, $A^* = (0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 9\ 0\ 0\ 0\ 0\ )$. La 1ª fila corresponde a la ecuación 0 = 3, que es incompatible.

Luego, el sistema es incompatible.

– Si m = 3, det A = 0 y $A = (0\ -\ 3\ 6\ 0\ 3\ 9\ 0\ 3\ -\ 3\ )$. Como $|-\ 3\ 6\ 3\ 9\,| =-\ 45 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = (0\ -\ 3\ 6\ 3\ 0\ 3\ 9\ 12\ 0\ 3\ -\ 3\ 0\ )\ \ f2 + f1\ \ f3 + f1\ \ (0\ -\ 3\ 6\ 3\ 0\ 0\ 15\ 15\ 0\ 0\ 3\ 3\ )\ f1{:}\,3\ \ f2 = 5f3\ \ f3{:}$
.

Como $|2\ 1\ 1\ 1\,| = 1 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema corresponde al sistema $\{-\ y + 2z = 1\ z = 1\ .$

Despejando y en la 1ª ecuación, y = 2z – 1 = 2.1 – 1 = 1.

Llamando x = k, las infinitas soluciones son $\{x = k\ y = 1\ z = 1$, con k ∈ R

– Si m = –3, det A = 0 y $A = (18\ 3\ -\ 6\ 18\ 3\ -\ 9\ -\ 18\ -\ 3\ 3\ )$. Como $|3\ -\ 6\ 3\ -\ 9\,| =-\ 9 \neq 0$, rg A = 2.

$A^* = (18\ 3\ -\ 6\ 3\ 18\ 3\ -\ 9\ 6\ -\ 18\ -\ 3\ 3\ 0\ )\ \ f2 - f1\ \ f3 + f1\ \ (18\ 3\ -\ 6\ 3\ 0\ 0\ -\ 3\ 3\ 0\ 0\ -\ 6\ 6\ )\ f1{:}\,3$
.

Como $|1\ -\ 2\ 0\ -\ 1\,| =-\ 1 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

La matriz del sistema corresponde al sistema $\{6x + y - 2z = 1\ z =-\ 1$, 6x + y – 2(–1) = 1, 6x + y = –1

Despejando y en la 1ª ecuación, y = –6x – 1

Llamando x = k, las infinitas soluciones son $\{x = k\ y =-\ 6k - 1\ z =-\ 1$, con k ∈ R

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que |A| = 1/4 y |B| = 2.
Calcula |C| sabiendo que $C = 2(AB^t)^2(B^t)^{-1}$. (2,5 puntos)

Resolución

Usando propiedades de los determinantes, $|C| = 2^3|A|^2|B|^2|B|^{-1} = 8(1/4)^2 2^2(1/2) = 1$

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(2, 0, –1) y corta a las siguientes

---

rectas: $s: \begin{cases} 2x + y - 3z - 6 = 0 \\ 2x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$ $\quad r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ (2,5 puntos)

Resolución

Tenemos que encontrar un punto A de r otro B de s de forma que A, B y P estén alineados.
La recta que se pide es entonces la que pasa por A, B y P.

$(-1, 0, -2) \in r$ y un vector director de r es $\vec{d_r} = (2, 1, 1)$. Un punto genérico de r es $A(-1 + 2k, k, -2 + k)$

En la recta s hacemos z = 0, $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ 2x - 8 = 0 \end{cases}$; x = 4, 2.4 + y – 6 = 0, y = –2. Luego, el punto $(4, -2, 0) \in s$

Un vector director de s se obtiene como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen: $\vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3, 0, -2) // (3, 0, 2)$. Un punto genérico de s es $B(4 + 3k', -2, 2k')$

Como A, B y P deben estar alineados, $\vec{PA} = (2k - 3, k, k - 1) // \vec{PB} = (2 + 3k', -2, 1 + 2k')$

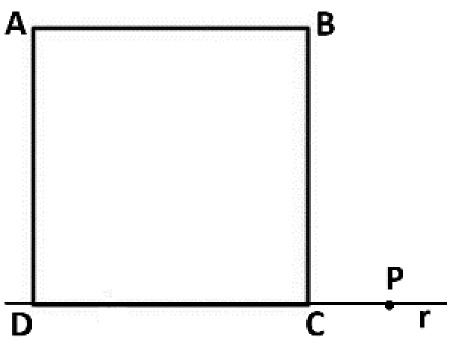
Luego, $\frac{2+3k'}{2k-3} = \frac{-2}{k} = \frac{1+2k'}{k-1}$. Resolviendo,
$\begin{cases} 2k + 3kk' = -4k + 6 \\ k + 2kk' = 2 - 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3kk' + 6k = 6 \to kk' = 2 - 2k \\ 2kk' + 3k = 2 \end{cases}$

Sustituyendo, $2(2 - 2k) + 3k = 2 \to 4 - 4k + 3k = 2 \to k = 2$ y
$\vec{PA} = (2.2 - 3, 2, 2 - 1) = (1, 2, 1)$

La recta t que piden pasa por P(2, 0, –1) y tiene vector director $\vec{d_t} = \vec{PA} = (1, 2, 1)$;
$t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos A(1, 0, –1) y B(1, 4, 2) y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto P(6, –4, –4).
(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

Resolución



Observa que $\vec{d_r} // \vec{AB} = (0, 4, 3)$ y como $P(6, -4, -4) \in r$, entonces
$r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 + 4k \\ z = -4 + 3k \end{cases}$

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento AB que pasa por A. (0,75 puntos)
Un vector normal del plano π que piden es $\vec{n} = \vec{AB} = (0, 4, 3)$ y como $A(1, 0, -1) \in \pi$ entonces π: 0(x – 1) + 4(y – 0) + 3(z + 1) = 0 ⇒ π: 4y + 3z + 3 = 0

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Resolución

D es el punto de corte de r y π: 4(−4 + 4k) + 3(−4 + 3k) + 3 = 0, 25k – 25 = 0, k = 1,
$\{x = 6\ y = 0\ z =- 1$, D(6, 0, −1)

$C = D + \vec{AB} = (6,\ 0,\ -1) + (0,\ 4,\ 3)$; C(6, 4, 2)

C1) Sea $f(x) = \cos cos \left(\frac{\pi}{2}x\right)\ \ln ln \left(x^2 + x - 5\right)$

a) Demuestra que f es continua en [2, 3]. (0,75 puntos)

Resolución

$x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$, x ≅ −2,8, x ≅ 1,8. Como $y = x^2 + x - 5$ representa a una parábola convexa que corta al eje X en −2,8 y 1,8, en el intervalo [2, 3] resulta que $x^2 + x - 5 > 0 \Rightarrow$ f es continua en [2, 3]

b) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que f´(c) = 0.
Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Resolución

Vamos a usar el teorema de Rolle, que dice: Si f(x) es continua en [a, b], derivable en (a, b) y además f(a) = f(b) entonces existe por lo menos un c ∈ (a, b), tal que f´(c) = 0.

Aquí, $f(x) = \cos cos \left(\frac{\pi}{2}x\right)\ \ln ln \left(x^2 + x - 5\right)$ es continua en [2, 3] y derivable en (2, 3) por ser producto de
funciones derivables

$f(2) = \cos cos \left(\frac{\pi}{2}2\right)\ \ln ln \left(2^2 + 2 - 5\right) =- 1. \ln ln\ 1 = 0$;

$f(3) = \cos cos \left(\frac{\pi}{2}3\right)\ \ln ln \left(3^2 + 3 - 5\right) = 0. \ln ln\ 7 = 0$

f cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Luego, ∃ c ∈ (2, 3) tal que f´(c) = 0

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.
Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

Resolución

En cuanto a la simetría, $f(-\ x) = \frac{3(-x)^3}{(-x)^2 - 4} =-\ f(x) = \frac{-3x^3}{x^2 - 4}$ ⇒ f es impar, simétrica respecto al origen O

Como $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, para $x = \pm 2$ no es continua por no estar definida

$f(x) = \frac{3(-2)^3}{0} = \frac{-24}{0} = \pm\infty$ ⇒ f tiene una asíntota vertical en x = −2 cuya ecuación es A.V. : x = −2

Además, $f(x) = \frac{-24}{0^+} =-\ \infty$ y $f(x) = \frac{-24}{0^-} =+\ \infty$

$f(x) = \frac{3.2^3}{0} = \frac{24}{0} = \pm\infty$ ⇒ f tiene una asíntota vertical en x = 2 cuya ecuación es A.V. : x = 2

Además, $f(x) = \frac{24}{0^-} =-\ \infty$ y $f(x) = \frac{24}{0^+} =+\ \infty$

Al ser grado del numerador 1 más que el del denominador, la gráfica de f tiene asíntota oblicua,
AO: y = mx + n.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{3x^3}{x^2-4}}{x} = \frac{3x^3}{x^3 - 4x} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$[f(x) -\ mx] = \left(\frac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x\right) \frac{3x^3 - 3x^3 + 12x}{x^2 - 4}\ \frac{12x}{x^2 - 4} = 0.$$

Luego, la asíntota oblicua en $\pm\infty$ es la recta de ecuación AO: $y = 3x$

Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: $y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{3x^3}{x^2-4} - 3x = \frac{12x}{x^2-4}$

$Si\ x \rightarrow +\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} > 0$. Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en $+\infty$

$Si\ x \rightarrow -\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} < 0$. Luego, la gráfica está “por debajo” de la asíntota en $-\infty$