



Valutazione formativa: pratiche online tra pari come attività di autoregolazione

A cura del gruppo UMI - DIGiMATH

Contesto Corsi di Matematica di Base

Domenico Brunetto (Politecnico di Milano)
Tiziana Pacelli (Università degli studi di Napoli Federico II)
Anna Pierri (Università degli studi di Salerno)
Maria Alessandra Mariotti (già Università degli studi di Siena)
Maria Polo (Università degli studi di Cagliari)

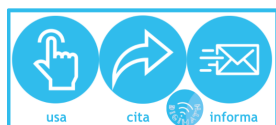
[Capitolo 1. Introduzione](#)

[Capitolo 2. La valutazione formativa](#)

[Capitolo 3. Le sperimentazioni](#)

[Capitolo 4. Prototipi di TASK](#)

[Bibliografia](#)



Il materiale prodotto dal gruppo UMI DIGiMATH è liberamente fruibile.

Si richiede di riconoscere il contributo di DIGiMATH riportandone il [logo](#).

In particolare le eventuali pubblicazioni redatte, anche parzialmente, sulla base di tali attività, dovranno recare un “acknowledgement” a DIGiMATH. Le attività connesse ai materiali di DIGiMATH saranno pubblicate sul sito, pertanto si invitano gli utenti a darne informazione inviando una mail a info@digimath.it

Capitolo 1. Introduzione

Negli ultimi anni, le ricerche in didattica della matematica hanno sottolineato l'efficacia della progettazione di ambienti e-learning per supportare processi di insegnamento-apprendimento a livello universitario (ad esempio, Descamps et al., 2006; Bardelle e Di Martino, 2012) e di promuovere l'utilizzo di opportune tecnologie per attivare stili di apprendimento collaborativi e riflessivi. Ad esempio, in Albano et al. (2020) vengono riportati i risultati relativi ad una sperimentazione focalizzata sull'implementazione di strumenti di e-learning con lo scopo di coinvolgere studenti - matricole in Scienze della Formazione Primaria e in Ingegneria - in pratiche di valutazione formativa basate sulla valutazione tra pari.

Nel contesto scolastico, Hattie (2009) ha ampiamente dimostrato come una corretta implementazione delle pratiche di valutazione formativa sia efficace per migliorare l'apprendimento della matematica. Nell'ultimo decennio, molti studi si sono concentrati sulla valutazione formativa come pratica didattica e diversi progetti internazionali si propongono di progettare e sviluppare strumenti per tale tipo di valutazione che, da un lato, evidenzino le conoscenze e il ragionamento matematico degli studenti, e dall'altro aiutino gli insegnanti sia a guidare gli allievi verso un apprendimento significativo sia a monitorare i loro progressi (ad esempio, il Mathematics Assessment Program: <http://map.mathshell.org>). Alcuni progetti, come il progetto FaSMEd (<https://microsites.ncl.ac.uk/fasmedtoolkit/>), fanno particolare riferimento al supporto delle nuove tecnologie. La ricerca si è concentrata soprattutto sulla scuola primaria e secondaria in contesti faccia a faccia (f2f). Come conseguenza, i contesti universitari, caratterizzati da un gran numero di studenti, rappresentano ancora una grande sfida per l'adattamento di questi modelli di processi di valutazione formativa.

Questo lavoro ha l'obiettivo di contribuire alla discussione didattica e accademica riportando l'analisi di una sperimentazione di valutazione formativa tra pari coadiuvata dalla piattaforma Moodle.

Capitolo 2. La valutazione formativa

Secondo la definizione di *valutazione formativa* condivisa in letteratura, *“la pratica in classe diventa formativa nel momento in cui consente a insegnanti e studenti di evidenziare i risultati degli studenti, condividerli, interpretarli e servirsi di essi per prendere decisioni sui passi successivi da fare nel processo di istruzione”* (Black e Wiliam, 2009, p. 9, tradotto in italiano).

Attività tipiche dei processi di valutazione formativa sono, quindi, quelle attraverso le quali gli studenti hanno modo di verificare i propri livelli di apprendimento, pianificare e attuare, in interazione con l'insegnante e i compagni di classe, le strategie necessarie per raggiungere gli obiettivi di apprendimento prefissati. Questa prospettiva è in linea con le ultime Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012), secondo cui la valutazione *“precede, accompagna e segue i percorsi curricolari. Attiva le azioni da intraprendere, promuove il bilancio critico su quelle condotte a termine. Assume una prevalente funzione formativa, di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo al miglioramento continuo”* (p.13).

Ramaprasad (1983) ha identificato tre processi chiave nell'ambito del processo di valutazione formativa:

- (a) *stabilire a che punto si trovano gli studenti nel loro apprendimento;*
- (b) *stabilire dove stanno andando gli studenti in questo processo;*
- (c) *stabilire in che modo si può raggiungere l'obiettivo.*

Tradizionalmente, l'insegnante è ritenuto responsabile di ciascuno dei tre processi, ma è necessario considerare anche il ruolo che possono svolgere gli studenti stessi ed i loro pari, che di solito sono i compagni di classe.

A partire dalle idee di Ramaprasad (1983), Wiliam e Thompson (2007) hanno elaborato un quadro teorico per la valutazione formativa, evidenziando come essa possa essere sviluppata attraverso *cinque strategie chiave*:

- (A) *chiarire gli obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione;*
- (B) *progettare discussioni di classe efficaci ed attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti;*
- (C) *fornire feedback che consenta allo studente di migliorare;*
- (D) *attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri;*
- (E) *attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.*

In questo modello, tre diversi *agenti* intervengono nelle pratiche di valutazione formativa: *l'insegnante, l'allievo e i suoi pari*.

L'insegnante svolge un ruolo cardine, avendo, infatti, la responsabilità di chiarire gli obiettivi di apprendimento e i criteri per il successo, che diventano criteri di valutazione (strategia chiave A), di organizzare attività di classe e discussioni che consentano l'apprendimento degli studenti (strategia chiave B) e di fornire un feedback in modo da permettere agli studenti di progredire nell'apprendimento (strategia chiave C).

Gli studenti hanno un ruolo importante sia nella comprensione degli obiettivi di apprendimento e dei criteri di valutazione (strategia chiave A), sia nell'assunzione di responsabilità per l'apprendimento dei loro compagni e di loro stessi (strategie chiave D ed E).

Criteri di valutazione

La valutazione formativa è guidata da criteri specifici stabiliti dal docente, in linea con la strategia formativa. In particolare, per quanto riguarda l'argomentazione si possono individuare tre criteri chiave: *correttezza, chiarezza e completezza*.

- Il criterio della *correttezza* si riferisce al dominio matematico, in particolare all'assenza di errori matematici nella risposta e nella giustificazione fornita;
- il criterio della *chiarezza* si riferisce al dominio comunicativo e alla comprensibilità della risposta da parte di un interlocutore (pari, insegnante);
- il criterio della *completezza* si riferisce ad entrambi i domini, con particolare attenzione alla consistenza logica e descrittiva dei passaggi che portano alla conclusione dell'argomentazione.

Tutti e tre i criteri si legano anche al ruolo fondamentale della strategia chiave (C): fornire un feedback che consenta allo studente di migliorare.

Il feedback

Il feedback riguarda le informazioni che lo studente riceve sul suo rendimento ed è, senza dubbio, uno degli strumenti più importanti per creare un ponte tra l'apprendimento effettivo e quello atteso. Secondo la definizione data da Ramaprasad (1983), il feedback diventa formativo solo se le informazioni fornite allo studente vengono utilizzate in qualche modo per migliorare le sue prestazioni. È, quindi, importante che il feedback vada al di là di un semplice "semaforo" verde o rosso per lo studente—che si limiterebbe solo ad orientare il suo comportamento—e mostri piuttosto quali sono i suoi eventuali errori, le carenze, le imprecisioni ed eventualmente le cause. Sulla base di queste riflessioni, Hattie e Timperley (2007) osservano che un feedback efficace dovrebbe consentire di rispondere a *tre domande chiave*:

- (1) Dove sto andando? (ovvero, quali sono gli obiettivi di apprendimento?)
- (2) Dove mi trovo? (ovvero, quale progresso ho fatto verso l'obiettivo prefissato?)
- (3) Come raggiungere la meta? (ovvero, cosa devo fare per migliorare/progredire?)

Queste tre domande sono declinate, in modo diverso, a seconda dell'agente (insegnante/pari/studente) che risponde, come riassunto in Tabella 1.

	Dove sto andando?	Dove si trova?	Come raggiungere la meta?
Insegnante	(A) Chiarire gli obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione	(B) Progettare discussioni di classe efficaci ed attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti	(C) Fornire feedback che consenta allo studente di migliorare
Pari	Capire e <i>condividere</i> obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione	(D) Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri	
Studente	Capire obiettivi di apprendimento e criteri di valutazione	(E) Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento	

Tabella 1. *Le tre domande chiave sui feedback. Tra parentesi la relativa strategia chiave.*

Hattie e Timperley, inoltre, distinguono quattro tipi di feedback:

- (a) **Feedback sul compito (sul prodotto)**, mirato a focalizzare l'attenzione su problematiche connesse all'interpretazione del testo del problema o alla correttezza della risposta fornita.
- (b) **Feedback sullo svolgimento del compito (sul processo)**, relativo ai processi necessari per comprendere ed affrontare efficacemente il compito.
- (c) **Feedback per l'autoregolazione**, focalizzato sulla capacità dell'individuo di auto-monitorarsi e dirigere consapevolmente le proprie azioni.
- (d) **Feedback sull'individuo in quanto persona**, che riguarda questioni relative alla valutazione di se stessi ed aspetti affettivi.

Dare feedback non è di per sé positivo o negativo, ma sono molti i fattori che possono contribuire al buon successo di un feedback sull'apprendimento. Sulla base di un'estesa meta-analisi, Hattie e Timperley evidenziano l'efficacia dei feedback sul compito (a) e sul suo svolgimento (b), mentre gli effetti minori sono riscontrati sui feedback sulla persona, come ad esempio complimenti e rimproveri (d).

I tre criteri di valutazione proposti sopra (correttezza, chiarezza e completezza delle argomentazioni) sono appropriati per i due tipi di feedback appena considerati: nello specifico, il primo criterio si adatta ad un tipo di feedback sul compito (a), mentre gli altri si adattano maggiormente al feedback di processo sullo svolgimento del compito (b).

Il ruolo svolto dalle tecnologie digitali

In tale contesto, le tecnologie digitali, come suggerito anche da Jenkins (2004), possono contribuire a creare ambienti di apprendimento che consentano di svolgere processi di valutazione formativa, permettendo di promuovere la partecipazione attiva degli studenti nelle varie discussioni, di monitorare i loro progressi, di fornire feedback immediato che possa portarli a riflettere sui loro progressi.

Sulla base di queste considerazioni sull'utilizzo della tecnologia per promuovere processi di valutazione formativa, nell'ambito del progetto FaSMEd è stata definita un'estensione del modello di Wiliam e Thompson. Si tratta di un modello tridimensionale (Figura 1) che comprende:

- le 5 *strategie-chiave* (Wiliam e Thompson, 2007);
- i 3 agenti (*insegnante, allievo e i suoi pari*) del processo valutativo;
- le modalità di come la *tecnologia* possa supportare i processi di valutazione formativa in ambiti educativi (Aldon et al., 2017; Cusi, Morselli e Sabena, 2017).

Le 5 strategie-chiave di valutazione formativa (FA-strategies in Figura 1) sono di seguito elencate:

- Chiarire/capire/condividere gli obiettivi di apprendimento e i criteri di valutazione;
- Progettare discussioni di classe efficaci e attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti;
- Fornire feedback che consentano allo studente di migliorare;
- Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri;
- Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.

Le funzionalità che caratterizzano il ruolo della tecnologia in tale modello sono le seguenti:

- *Inviare e mostrare*, quando la tecnologia è utilizzata come supporto per la comunicazione e per attivare discussioni di classe.
- *Elaborare e analizzare*, quando la tecnologia è utilizzata per analizzare i dati e le informazioni raccolti durante le lezioni.
- *Creare un ambiente interattivo*, quando la tecnologia è utilizzata per creare un ambiente di apprendimento in cui tutti possano interagire.

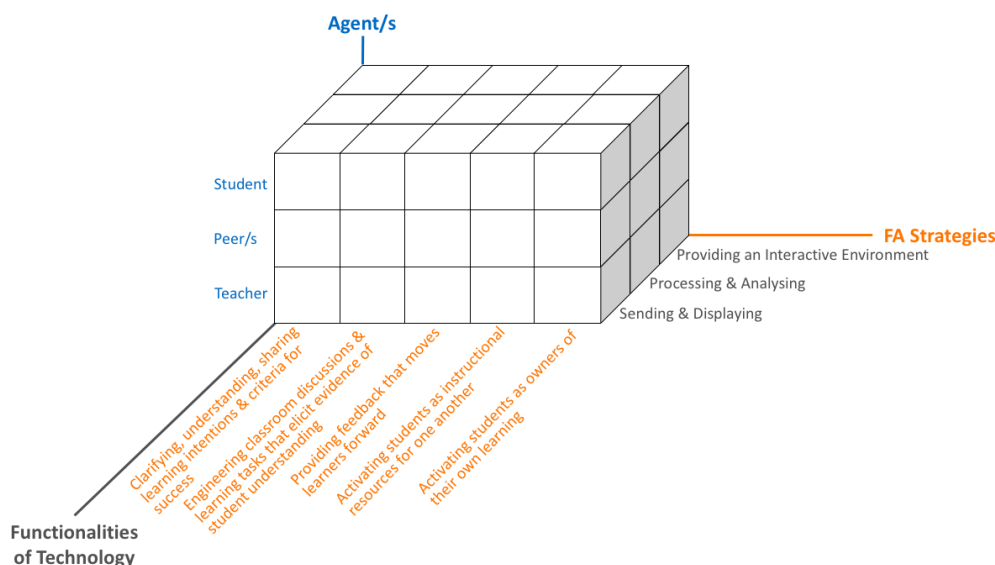


Figura 1. Grafico del quadro FaSMEd, dove le strategie-chiave, gli agenti e le funzionalità della tecnologia costituiscono tre dimensioni fondamentali.

Capitolo 3. Le sperimentazioni

Negli ultimi anni, sono stati condotti alcuni studi riguardanti l'ambito del livello universitario per indagare su come una piattaforma online possa essere sfruttata per promuovere processi di valutazione formativa della matematica che coinvolgano i tre agenti – insegnante, studenti e pari (in particolare i pari) – in una modalità blended, focalizzando l'attenzione sulle due funzionalità *Inviare e mostrare*, ed *Elaborare e analizzare* del modello tridimensionale FaSMEd (Figura 1).

L'attività di valutazione formativa online è stata sperimentata in due diverse università italiane, l'Università degli studi di Salerno e l'Università degli studi di Torino, nell'ambito di corsi di laurea che affrontano diversi contenuti matematici (Albano et al., 2020; Sabena et al., 2020; Pierri, 2020).

Presso l'Università di Salerno, le attività di valutazione formativa online sono state usate come un supporto a un corso tradizionale, in presenza, di "Geometria, Algebra e Logica" per le matricole di Ingegneria Informatica (secondo semestre). Il contenuto del corso riguarda principalmente l'algebra lineare, le cui difficoltà di apprendimento sono ben note. Gran parte della letteratura (Hillel, 2000; Sierpinksa, 2000) sull'apprendimento dell'algebra lineare documenta, infatti, l'incapacità degli studenti di risolvere i problemi di base, di muoversi in modo flessibile tra le diverse rappresentazioni, di utilizzare i teoremi astratti in situazioni concrete e persino di parlare o scrivere utilizzando un linguaggio opportuno.

Da un punto di vista tecnologico, è stato utilizzato uno specifico ed avanzato strumento della piattaforma web Moodle, il [workshop](#).

Il workshop mira a rendere gli studenti responsabili sia del proprio processo di apprendimento che di quello dei pari. Da un lato, infatti, offre allo studente la possibilità di poter caricare la risoluzione di specifici problemi posti dal docente; dall'altro, dopo aver distribuito in maniera automatica ed anonima le diverse risoluzioni, garantendo che il singolo studente non riceva il proprio svolgimento, ne permette la correzione da parte di un suo pari, ricorrendo a criteri di valutazione opportunamente predisposti dal docente in fase di progettazione del workshop. A chiusura dell'attività, oltre al feedback puntuale che ogni studente può ricevere da un suo pari, il docente può mettere a disposizione tutti i problemi assegnati nel workshop ed i relativi modelli di risoluzione ottimale, estratti dagli elaborati prodotti dagli studenti durante l'attività, ma opportunamente rivisti, integrati e commentati.

Il tipo di compito

Va sottolineato che la valutazione formativa è fortemente promossa su attività ad alto contenuto argomentativo, avendo come obiettivo d'apprendimento anche il miglioramento delle competenze argomentative stesse.

Di seguito, sono riportate le attività svolte nell'ambito del corso di Geometria, Algebra e Logica (GAL) per le matricole di Ingegneria Informatica presso l'Università degli studi di Salerno. Durante il corso sono state preparate e somministrate cinque attività valutative, in prossimità delle prove intermedie e della prova finale:

- Esercitazione su matrici e sistemi lineari.
- Esercitazione su spazi vettoriali.
- Esercitazione di riepilogo in vista della prova intracorso, con focus su spazi vettoriali/euclidei.
- Esercitazione su Omomorfismi e Diagonalizzazione.
- Esercitazione su Coniche e Geometria Analitica in 3D.

Per ognuna di esse il docente ha predisposto un set di tracce su diversi contenuti matematici (matrici e sistemi lineari, spazi vettoriali, spazi vettoriali/euclidei, omomorfismo e diagonalizzazione, coniche e geometria analitica in 3D). Le tracce sono state distribuite casualmente agli studenti che in maniera volontaria hanno preso parte alle varie attività. A titolo esemplificativo si riporta una traccia relativa all'Esercitazione condotta su Omomorfismi e Diagonalizzazione (Figura 2).

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x + hy + hz, x - y + hz, hx - y - z)$$

a) Calcolare, per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base di $\text{Im } f$.
b) Dire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$, f non è iniettiva.

Figura 2. Esempio di traccia relativa all'Esercitazione su Omomorfismi e Diagonalizzazione.

Le tracce sono state inviate via mail (Figura 3) in modo tale che 3-4 studenti ricevessero una stessa identica traccia. Nella mail erano presenti anche le seguenti due richieste, replicabili ad altri contenuti matematici:

- *“spiega cosa stai facendo man mano, in modo sintetico ma sufficientemente chiaro affinché il lettore possa seguire il ragionamento che hai fatto e la dimostrazione che hai applicato”;*
- *“richiama gli opportuni risultati teorici (teoremi, definizioni, proprietà) che sono alla base delle procedure utilizzate”.*

Caro studente,
in allegato trovi la traccia di una prova da svolgere entro mercoledì mattina 11 aprile ore 8.
Risolvi ogni quesito in maniera chiara, corretta e completa.
Più precisamente:
- spiega man mano cosa stai facendo, in modo sintetico ma sufficientemente chiaro perché chi legge possa seguire il ragionamento che hai fatto e il procedimento che hai applicato;
- richiama opportuni risultati teorici (teoremi, definizioni, proprietà) che sono alla base delle procedure che usi.

Non mettere il tuo nome nello svolgimento, né nel nome dei file che consegnerai.
Al termine, ti verrà richiesto di valutare alcuni compiti di compagni, in forma anonima.

La consegna e le successive valutazioni avverranno attraverso il tool "Workshop" della piattaforma eLearning, che sarà disponibile entro la giornata di lunedì 09/04/2018.

Troverete il workshop "Esercitazione 1 - GAL" nella sezione Miscellanea .

Seguirà avviso dettagliato sull'uso del Workshop e sulla fase di valutazione che partirà dopo la consegna degli svolgimenti da parte di tutti.

Buon lavoro :)

Figura 3. Email inviata agli studenti tramite Moodle.

Il modulo Workshop di Moodle prevede una fase di impostazione, all'interno della quale il docente ha potuto predisporre l'ambiente:

- fissando un tempo entro il quale gli studenti dovevano svolgere le due fasi: svolgere il compito (prima fase) e revisionare il compito prodotto da un pari (seconda fase); ogni fase ha avuto una durata massima di quattro giorni;
- definendo gli elementi di valutazione associati ai tre criteri di correttezza, completezza, chiarezza (si veda sezione successiva);
- distribuendo un certo numero di elaborati per ogni studente, escludendo l'autovalutazione (ad esempio, 3 revisori per ogni elaborato);
- rendendo evidenti agli studenti i voti ricevuti dai revisori in fase di correzione del compito.

Riassumendo, dopo aver ricevuto via e-mail il compito selezionato dal docente, è stata chiesta la risoluzione ed il successivo caricamento in piattaforma dello svolgimento entro una determinata data fissata dal docente. Poi, grazie alla funzionalità di ridistribuzione automatica del modulo di Workshop, tutti i compiti-e le relative soluzioni-sono stati assegnati agli studenti, in modo che ogni studente ricevesse tre revisioni del proprio elaborato. Entro una seconda scadenza, fissata dal docente durante la preparazione dell'attività, gli studenti hanno dovuto valutare i prodotti ricevuti secondo i 3 criteri (correttezza, chiarezza e completezza). Nella fase finale dell'attività, ogni studente ha ricevuto un commento dettagliato in corrispondenza di ogni elemento valutato dal revisore ed un feedback generale. La partecipazione su base volontaria a questo tipo di attività è stata, tuttavia, tenuta in considerazione dal docente in fase di valutazione finale come "bonus" di cui lo studente poteva disporre.

Istruzioni per la valutazione

Una volta consegnati gli elaborati, agli studenti viene chiesto di valutarli attraverso istruzioni dettagliate. In questo paragrafo si descrivono le istruzioni relative alla fase di valutazione utilizzate nell'ambito del corso di GAL presso l'Università degli studi di Salerno. Non di meno, tali istruzioni possono essere replicate anche nell'ambito di attività di altri corsi.

La seguente richiesta viene predisposta dal docente:

“Correggi e valuta le prove che ti sono state assegnate, come se tu fossi un docente che deve verificare le conoscenze di uno studente, relativamente agli argomenti proposti, in base all’elaborato che ha consegnato. La correzione e valutazione dovrà essere fatta tenendo presente i criteri di chiarezza, correttezza e completezza di seguito esplicitati. Ti è richiesto un commento, in cui potrai dare al tuo compagno un feedback, che è tanto più utile quanto più consiste in suggerimenti per recuperare errori o migliorare.”

Nella piattaforma Moodle, i criteri sono stati definiti mediante specifici *elementi di valutazione*, predisposti dal docente, che lo studente ha dovuto considerare:

Criterio della correttezza: *Per ogni esercizio, valuta se ci sono errori nel risultato o nel processo risolutivo e se le risposte sono tutte presenti. I richiami teorici, se ci sono, sono corretti? I simboli matematici sono usati in maniera corretta?*

Criterio della chiarezza: *Per ogni esercizio, valuta se il risultato è espresso chiaramente e in modo univoco e se il procedimento risolutivo è presente, è comprensibile, ossia se esprime in modo chiaro, preciso e univoco cosa intende dire. Se individui parti non chiare, segnalalo allo studente.*

Criterio della completezza: *Valuta se sono presenti tutti i risultati/risposte. Laddove richiesto dalla consegna, valuta se i procedimenti sono completi o se ci sono parti mancanti o salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate.*

Nota: Il workshop di Moodle oltre alla possibilità di commentare, permette anche di impostare una valutazione attribuendo un voto numerico da parte dei revisori. Tuttavia questo tipo di valutazione, testata nelle prime edizioni, portava gli studenti a inserire solo una valutazione numerica senza commentare gli elaborati prodotti, peculiare per l’obiettivo formativo prefissato.

Risultati della sperimentazione

Di seguito sono riportati alcuni esempi di feedback forniti dagli studenti nel ruolo di revisori. I feedback sottostanti, riferiti ai singoli elementi valutativi, riguardano non un solo compito ma i vari compiti somministrati nelle diverse attività di workshop riguardanti le matrici, gli spazi vettoriali ed euclidei, ecc..., avviate nel corso GAL presso l’Università degli studi di Salerno.

Elemento 1: Correttezza

Di seguito si riporta un esempio di risposta di un revisore relativa all’esercizio riguardante le matrici:

L’esercizio è stato svolto correttamente, ad eccezione del secondo punto, in cui è presente un errore di calcolo. Alla fine della riduzione a scalini, infatti, abbiamo una matrice con tre righe non nulle, per cui il vettore assegnato non appartiene allo spazio V e, di conseguenza, esso non può essere espresso come combinazione lineare della base.

Si può osservare come il revisore discuta sul perché dell’errore. Egli parte dal calcolo “[... abbiamo una matrice con tre righe non nulle...]” e lo interpreta in termini di significato teorico “[... per cui il vettore dato non può appartenere allo spazio V ...]” e infine ottiene come conseguenza un ulteriore risultato teorico “[... di conseguenza non può essere espresso come combinazione lineare della base...]”.

Elemento 2: Chiarezza

Di seguito si riporta un esempio di risposta di un revisore relativa all’esercizio riguardante gli spazi vettoriali:

Specifica, quando vai a calcolare la rappresentazione cartesiana dello spazio ortogonale come prodotto scalare fra generici valori x, y, z, t e la base dello spazio, che hai sostituito il valore h con 1 in tali vettori.

Il revisore osserva cosa manca e, quindi, chiede di rendere il passaggio da implicito ad esplicito *“Specifica [...] che hai sostituito il valore h con 1 in tali vettori.”*

Elemento 3: Completezza

Di seguito si riporta un esempio di risposta di un revisore relativa all'esercizio riguardante gli omomorfismi:

Richiami teorici abbastanza presenti ma mancano di un formalismo.

In tale commento lo studente revisore è soddisfatto dai richiami teorici; inoltre si nota come per il revisore sia importante, però, anche l'aspetto formale.

Considerazioni sull'impatto

Al fine di valutare l'impatto che le attività di valutazione formativa potessero aver avuto sugli studenti, è stato somministrato, alla fine del corso GAL, che stiamo illustrando, un questionario con domande relative agli aspetti cognitivi, metacognitivi e affettivi. L'analisi delle risposte degli studenti ha permesso di identificare due categorie prevalenti, relative al valore aggiunto che gli studenti hanno attribuito alla loro partecipazione a questo tipo di attività. Nelle loro risposte è stata osservata, infatti, una notevole presenza di:

Elementi relativi al rapporto dello studente con il corso e l'esame: gli studenti hanno individuato nelle attività di valutazione formativa un aiuto per tenere il passo con le lezioni frontali, per mantenere alta l'attenzione durante tutto il corso, per rafforzare lo studio autonomo; di seguito alcuni esempi di risposte date:

- *“Fondamentale. Le consegne sono molto importanti anche perché aiutano a stare al passo”;*
- *“Il dover consegnare un compito che successivamente sarebbe stato valutato, mi ha spronato a formalizzare al meglio concetti teorici per poterli esprimere al meglio in maniera sintetica”;*
- *“Mi permetteva di arrivare alle lezioni teoriche con una base di conoscenza e preparazione più che sufficientemente pronta”;*
- *“Dai workshop, e quindi da più eventuali ‘modi di svolgere un esercizio’, ho imparato che bisogna saper sfruttare risultati già ottenuti, precedenti, in modo da minimizzare il lavoro ed essere più chiari, e in vista dell'esame, questo ha conferito più sicurezza”.*

Elementi di autovalutazione e recupero: i workshop online di valutazione formativa sono stati ritenuti utili dagli studenti per capire se avevano compreso o meno gli argomenti in questione e, di conseguenza, il loro livello di conoscenza; in particolare, la valutazione tra pari li ha aiutati a capire anche i propri errori e a chiarire dubbi e domande. Di seguito alcuni esempi di risposte date:

- *“La partecipazione ai workshop mi ha permesso di capire dove ci fossero più lacune, in modo tale da lavorarci su maggiormente”;*
- *“Prima di correggere un errore andavo a rivedere la teoria o esercizi simili per essere sicura della correzione”;*
- *“La partecipazione mi ha permesso di sviluppare un corretto e formale metodo di risoluzione degli esercizi proposti, grazie alla possibilità di confrontarmi con il metodo altrui”;*
- *“Alla fine, ho imparato ad amalgamare gli argomenti al meglio, creare un discorso coerente tra i vari oggetti studiati”.*

Inoltre, dall'analisi delle risposte al questionario, emerge che il ruolo di valutatore—svolto dagli studenti—ha rappresentato una sfida per molti partecipanti alle attività. In particolare, gli studenti che non si sentivano *self-confident* con la matematica e non erano sicuri delle proprie risposte ai compiti, hanno riferito di avere avuto difficoltà nel valutare i vari compiti, soprattutto nel valutare l'elemento relativo alla correttezza.

Dal punto di vista dei docenti del corso, queste attività di valutazione formativa tra pari sono state in grado di suscitare un forte impatto emotivo negli studenti che, se esplicitato e condiviso, potrebbe essere sfruttato per migliorare il processo cognitivo dei partecipanti, incentivandoli ad un apprendimento consapevole e profondo. Il processo di valutazione tra pari aiuta gli studenti a sviluppare un'attenzione sui processi, mettendoli in condizione di riuscire a dare feedback utili sul processo risolutivo del compito piuttosto che sul mero risultato finale.

Dal punto di vista della progettazione dell'attività di workshop, si potrebbe pensare di organizzare una discussione finale in presenza sugli aspetti più critici riportati nel questionario investigativo.

Capitolo 4. Prototipi di TASK

In questa sezione riportiamo alcuni prototipi di attività che possono essere da spunto per costruire attività di valutazione formativa nell'ambito di corsi universitari inerenti l'algebra lineare, l'analisi, l'algebra e la geometria.

Questi esempi sottostanti sono stati progettati da:

- Samuele Antonini (Università degli Studi di Firenze),
- Chiara Brambilla (Università Politecnica delle Marche),
- Alessio Russo (Università degli Studi della Campania "Luigi Vanvitelli"),
- Luca Spada (Università degli Studi di Salerno).

e sono stati riorganizzati secondo il quadro teorico descritto nel [Capitolo 2](#)

Ogni attività descritta di seguito include, in modo schematico, la *descrizione del compito* (problema/esercizio matematico), *le difficoltà* che con tale compito possono essere affrontate e discusse, e i *criteri di valutazione formativa tra pari* elaborati dal docente. Inoltre, sono forniti *modelli di risposta (sbagliata/corretta)*.

Task 1 - Algebra lineare

Descrizione del compito (problema/esercizio matematico)

Rispondere, giustificando la risposta, a semplici domande teoriche come ad esempio queste (nell'ambito dell'algebra lineare):

- 1) Esiste una matrice simmetrica 3×3 di rango 2?
- 2) È vero che se una matrice A soddisfa $A^2 = 0$ allora $\det(A) = 0$?
- 3) Esiste un'applicazione lineare suriettiva da R^3 in R^4 ?
- 4) È vero che ogni applicazione lineare da R^3 in R^4 è iniettiva?

Quando basta un controesempio? Quando invece serve una dimostrazione generale?

Difficoltà che possono essere affrontate e discusse

(Si veda [difficoltà linguaggio](#) e [difficoltà conoscenze preliminari](#)).

Semplici domande, in questo caso riguardanti l'algebra lineare, possono fare emergere difficoltà riguardanti l'uso di esempi o controesempi per dare delle risposte complete, l'uso della negazione e dei quantificatori e, infine, possibili lacune riguardanti le conoscenze preliminari. La semplicità delle domande serve proprio a separare la valutazione delle competenze più avanzate e specifiche da quelle preliminari o di tipo linguistico. Se infatti, da un lato, è necessario un ambito formale per poter valutare eventuali difficoltà di questo tipo, dall'altro, è essenziale mantenerlo il più semplice possibile per poter distinguere questo tipo di difficoltà da quelle che riguardano specifiche conoscenze.

Difficoltà nelle conoscenze preliminari. Difficoltà nell'uso della negazione, dei quantificatori.

Comprendere l'uso di esempi e controesempi per rispondere a domande formulate con "Esiste" o "Per ogni".

Criteri di valutazione per il peer assessment

Criterio della correttezza: Per ogni domanda, valuta se ci sono errori nella risposta o nelle motivazioni che hanno portato a quella risposta.

Criterio della chiarezza: Per ogni domanda, valuta se l'argomentazione è presente e se è stata espressa chiaramente e in modo univoco. Se individui parti non chiare, segnalalo allo studente.

Criterio della completezza: Valuta se sono presenti tutte le risposte. Valuta se le argomentazioni sono complete o se ci sono parti mancanti o salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate. Serviva un esempio o un controesempio che non è stato fatto? Serviva una dimostrazione che non è stata fornita?

Modelli di risposta (sbagliata/corretta)

Risposte sbagliate

- 1) No, una matrice simmetrica 3×3 ha sempre rango 3, infatti la matrice $(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(0,0,1)$ e' simmetrica e ha rango 3.

- a) La risposta è sbagliata e la argomentazione è errata. La risposta è sbagliata perché esistono matrici simmetriche 3×3 di rango diverso da 3; la motivazione è sbagliata perché tenta di stabilire un fatto generale semplicemente fornendo un controesempio.
- 2) *Sì, perché è la matrice nulla.*
- a) La risposta è corretta ma l'argomentazione è sbagliata/incompleta. La motivazione addotta è che se $A^2 = 0$ allora A è la matrice nulla. Questo fatto non è argomentato e infatti è falso. Esistono matrici diverse dalla matrice nulla il cui quadrato è 0.
- 3) *Sì, basta mandare quattro vettori di R^3 nella base di R^4 .*
- a) La risposta è sbagliata e l'argomentazione è sbagliata/incompleta. Un'applicazione lineare si ottiene scegliendo arbitrariamente dove mandare la base di uno spazio vettoriale, non mandando elementi arbitrari nella base.
- 4) *Sì, perché R^3 è immerso in R^4 .*
- a) La risposta è sbagliata come anche la motivazione è sbagliata, infatti quest'ultima si basa solo un esempio, in generale esistono funzioni lineari non iniettive di questo tipo.

Risposte corrette

- 1) *Sì, ad esempio la matrice $(1,2,0), (2,1,0), (0,0,0)$ è simmetrica e ha rango 2.*
- 2) *Sì, se $A^2 = 0$ allora $\det A^2 = 0$, poiché $\det(BC) = \det(B)\det(C)$ per il Teorema di Binet, si ha che $\det A^2 = 0$, quindi $\det(A) = 0$.*
- 3) *No, l'immagine di un'applicazione lineare ha dimensione minore o uguale a quella del dominio. Infatti per il Teorema della Dimensione la dimensione del dominio è la somma della dimensione del Nucleo e della dimensione dell'Immagine (e le dimensioni sono quantità positive o nulle).*
- 4) *No, per esempio la funzione che manda tutto R^3 in $(0,0,0,0)$ è lineare ma non iniettiva.*

Task 2 - Analisi 1

Descrizione del compito (problema/esercizio matematico)

- Disegna, se possibile, il grafico di una funzione reale di variabile reale tale che il limite a più infinito sia uguale a 2 e il grafico della funzione intersechi la retta di equazione $y = 2$ infinite volte.
- Se possibile riporta un ulteriore esempio di funzione con le stesse proprietà.
- Se l'esempio esiste descrivi a parole come costruire altre funzioni con le stesse proprietà.
- Se l'esempio non esiste, spiega perché non esiste.

Difficoltà che possono essere affrontate e discusse

(Si veda [difficoltà linguaggio](#) e [difficoltà conoscenze preliminari](#)).

La produzione di esempi ha lo scopo di promuovere familiarità con i concetti matematici e con le loro rappresentazioni e, dunque, di conciliare la conoscenza formale con la conoscenza intuitiva. Quando gli esempi richiesti esistono (come in questo caso), sono spesso possibili più soluzioni, in caso contrario diventa necessario dimostrare l'impossibilità. Le consegne possono essere costruite in modo da richiedere che l'esempio soddisfi proprietà che comunemente gli studenti possono ritenere contraddittorie. Il processo di costruzione di esempi può, dunque, portare alla luce eventuali misconcezioni (in questo caso, per esempio, è comune che gli studenti ritengano che *"la funzione non può toccare l'asintoto"*) e promuovere una riflessione su di esse da parte degli studenti.

Criteri di valutazione per il peer assessment

- **Criterio della correttezza:** Per ogni esercizio, valuta se ci sono errori negli esempi e se le risposte sono tutte presenti. I richiami teorici, se ci sono, sono corretti? I simboli matematici sono usati in maniera corretta?
- **Criterio della chiarezza:** Per ogni esercizio, valuta se il risultato è espresso chiaramente e in modo univoco e se sono presenti spiegazioni esaurienti. È comprensibile, ossia esprime in modo chiaro e rigoroso cosa intende dire? Se individui parti non chiare, segnalalo allo studente.
- **Criterio della completezza:** Valuta se sono presenti tutte le risposte. Valuta se le argomentazioni sono complete o se ci sono parti mancanti, salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate.

Modelli di risposta (sbagliata/corretta)

Una risposta sbagliata

La funzione non esiste, perché se il limite a più infinito è uguale a 2 significa che la funzione si avvicina alla retta di equazione $y = 2$ senza mai toccarla.

Due risposte corrette

- La funzione costante $f(x) = 2$.
- Un grafico con oscillazioni attorno alla retta $y = 2$ di ampiezza decrescente a 0.

Task 3 - Algebra

Descrizione del compito (problema/esercizio matematico)

Si considerino i numeri primi $p = 127$ e $q = 163$. Usando le cifre di p e q come coefficienti di polinomi di secondo grado si ottengono i seguenti polinomi: $f = x^2 + 2x + 7$ e $g = x^2 + 6x + 3$.

1. Studiare l'irriducibilità di f negli anelli di polinomi $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ e $C[x]$.
2. Studiare l'irriducibilità di g negli anelli di polinomi $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ e $C[x]$.
3. Evidenziare analogie e differenze nel comportamento dei polinomi f e g .

Si consideri un numero primo di tre cifre nella rappresentazione in base 10: $p = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$.

4. Partendo dal polinomio $f = ax^2 + bx + c$, si provi a generalizzare le situazioni analizzate nei casi precedenti. (Suggerimento: Si osservi che $f(10) = p$).

Difficoltà che possono essere affrontate e discusse

(Si veda [difficoltà linguaggio](#) e [difficoltà conoscenze preliminari](#))

Questo esempio di problema è utile per affrontare uno stesso problema in contesti diversi. Esso mette in evidenza le capacità dello studente di saper confrontare, cogliendo analogie e differenze, teorie elementari (ad esempio, la divisibilità nell'anello degli interi e in quello dei polinomi). Inoltre, nelle domande successive, il problema permette di analizzare la capacità di generalizzazione a partire dalle analogie tra teorie diverse. Anche in questo caso è importante saper utilizzare il linguaggio matematico e l'argomentazione nelle dimostrazioni, nonché la capacità di applicare e combinare teoremi.

Criteri di valutazione per il peer assessment

- **Criterio della correttezza:** Per ogni domanda, valuta se ci sono errori nelle risposte e se esse sono tutte presenti. I richiami teorici, se ci sono, sono corretti? I simboli matematici sono usati in maniera corretta?
- **Criterio della chiarezza:** Per ogni esercizio, valuta se il risultato è espresso chiaramente e in modo univoco e se sono presenti spiegazioni esaurienti. È comprensibile? Ossia esprime in modo chiaro e rigoroso cosa intende dire? Se individui parti non chiare, segnalalo allo studente.
- **Criterio della completezza:** Valuta se sono presenti tutte le risposte. Valuta se le argomentazioni sono complete o se ci sono parti mancanti, salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate.

Modelli di risposta (sbagliata/corretta)

Una risposta sbagliata

Poiché p e q sono numeri primi, allora i polinomi f e g sono irriducibili in ciascuno degli anelli di polinomi $Z[x]$, $Q[x]$, $R[x]$ e $C[x]$.

Due risposte corrette

- Poiché i polinomi f e g sono monici (e quindi primitivi) l'irriducibilità in $Z[x]$ è equivalente all'irriducibilità in $Q[x]$. Un modo per dimostrare quest'ultima è quella di osservare che sia f che g (polinomi di secondo grado) sono privi di radici razionali. Inoltre, f è irriducibile in $R[x]$ perché è privo di radici reali, mentre g è riducibile in $R[x]$ perché ha radici reali. Infine, f e g sono riducibili in $C[x]$ per il Teorema Fondamentale dell'Algebra.
- Un altro modo di rispondere (senza variare il ragionamento precedente relativamente a $R[x]$ e a $C[x]$) è quello di utilizzare la definizione di irriducibilità nell'anello $Z[x]$ che ricorda molto quella di numero primo: il polinomio p è irriducibile in $Z[x]$ se gli unici suoi divisori sono $+1$, -1 , $+p$ e $-p$. Infatti, supponiamo che $f=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$, con a_1x+b_1 e a_2x+b_2 polinomi appartenenti a $Z[x]$. Allora $127=(a_1 \cdot 10+b_1)(a_2 \cdot 10+b_2)$, e quindi, poiché 127 è un numero primo, si ha che $a_1 \cdot 10+b_1=1$ oppure $a_2 \cdot 10+b_2=1$. Ciò comporta che $f=a_1x+b_1$ oppure $f=a_2x+b_2$, una contraddizione. In modo analogo si ragiona nel caso del polinomio g . Questo secondo modo di affrontare i primi quesiti ha il vantaggio di evidenziare il ruolo giocato dai numeri primi p e q nella dimostrazione dell'irriducibilità di f e di g in $Z[x]$ (e quindi in $Q[x]$), e di preparare il terreno per la generalizzazione proposta nell'ultimo quesito.

Task 4 - Geometria

Descrizione del compito (problema/esercizio matematico)

Sia β il piano di equazione: $3x+2x-y+7=0$.

1. Determinare una retta parallela ad esso passante per il punto P di coordinate (1,1,1).
2. La retta ortogonale a β passante per P.
3. Un piano per P ortogonale a β .
4. Il piano per P parallelo a β .

Difficoltà che possono essere affrontate e discusse

(Si veda [difficoltà linguaggio](#) e [difficoltà conoscenze preliminari](#)).

Rispetto al problema del linguaggio si vuole analizzare la capacità di distinguere l'articolo indeterminativo da quello determinativo. Si vuole evidenziare come tale differenza della lingua italiana sia strettamente legata al problema dell'unicità della soluzione (nel caso dell'articolo determinativo) o alla non unicità in caso contrario.

Relativamente ai quesiti 1 e 3 ci si aspetta delle difficoltà legate al fatto che per contratto didattico gli studenti sono abituati a quesiti a risposta chiusa e restano spaesati di fronte alla non unicità della soluzione che non consente neanche il confronto tra loro.

Riguardo alle conoscenze preliminari ci si aspetta una scarsa abitudine alla visualizzazione spaziale e, quindi, a una scarsa capacità di previsione dell'unicità o della non unicità della soluzione.

L'esercizio potrebbe essere svolto solo in parte oppure potrebbe essere addirittura dotato di una discussione teorica sulla non unicità mostrando più esempi per le risposte 1 e 3 o ancora tutte le possibili risposte.

Criteri di valutazione per il peer assessment

- **Criterio della correttezza:** Per ogni domanda, valuta se ci sono errori nella risposta o nelle motivazioni che hanno portato a quella risposta.
- **Criterio della chiarezza:** Per ogni domanda, valuta se l'argomentazione è presente e se è stata espressa chiaramente e in modo univoco. Se individui parti non chiare, segnalalo allo studente.
- **Criterio della completezza:** Valuta se sono presenti tutte le risposte. Valuta se le argomentazioni sono complete o se ci sono parti mancanti o salti nel ragionamento, o conclusioni non giustificate. Serviva un esempio o un controesempio che non è stato fatto? Serviva una dimostrazione che non è stata fornita?

Modelli di risposta (sbagliata/corretta)

Una possibile risposta errata

La retta cercata è:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

In questo modo si confonde il concetto di parallelismo e ortogonalità tra retta e piano, perché si usano come numeri direttori gli unici numeri presenti mostrando un modo di operare meramente procedurale.

Perché $(-1,1,-1)(3,2,-1) = 0$. Anche qui si confonde il concetto di ortogonalità tra retta e piano con quello di parallelismo

$3x+2y-z-4 = 0$. In questo modo si confonde il concetto di parallelismo e ortogonalità tra piani, perché si usano gli unici numeri presenti mostrando un modo di operare meramente procedurale.

$-x-y-z+3 = 0$. Tale piano passa per P ma è ortogonale e non parallelo al piano dato; quindi, anche qui si confondono parallelismo e ortogonalità.

Possibile risposta corretta

Il vettore di componenti $(3,2,1)$ è ortogonale a β . Dunque ogni retta parallela al piano avrà come vettore direzione un vettore (l, m, n) tale che $(3,2,-1)(l, m, n)=0$ cioè $3l+2m-n = 0$

Per $l = 1$ e $m = 0$ necessariamente $n = 3$ e, dunque, una delle rette cercate è:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Per completezza, qui si potrebbe discutere sulla non unicità e mostrare qualche altra soluzione o in generale tutte.

La retta, se per P ortogonale a β , è:

$$s = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Essa è unica per considerazioni geometriche. Dunque un tale piano è di tipo:

$$\alpha: \begin{cases} x = 1 + 3t + as \\ y = 1 + 2t + bs \\ z = 1 - t + cs \\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Al variare di a , b e c si ottengono tutti i piani cercati e se ne può mostrare un esempio discutendone la non unicità.

Ogni piano parallelo a β deve necessariamente essere della forma: $3x + 2y - z + d = 0$

Imponendo il passaggio per P si ottiene $d = -4$, da cui il piano cercato che è unico.

Bibliografia

- Albano G., Pierri A., Sabena C. (2020). Enhancing formative assessment practices in undergraduate courses by means of online workshops. In Barzel, B.; Bebernik, R.; Göbel, L.; Pohl, M.; Ruchniewicz, H.; Schacht, F.; Thurm, D. *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – ICTMT 14*. p. 155-162, Essen, Germany
- Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., & Sabena, C. (2017). Formative assessment and technology: reflections developed through the collaboration between teachers and researchers In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert, *Mathematics and technology: a CIEAEM source book*. Series 'Advances in Mathematics Education'. Springer International Publishing.
- Bardelle, C., & Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary–tertiary transition in mathematics: for what purpose? *ZDM Mathematics Education*, 44 (6), 787-800.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5-31.
- Cusi, A., Morselli, F. & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, 49(5), 755–767.
- Descamps, S.X., Bass, H., Bolanos Evia, G., Seiler, R., and Seppala, M. (2006). E-learning mathematics. In M. Sanz-Solé et al. (Eds.), *Proc. of ICM* (Madrid), vol. 3(1743-1768).
- Jenkins, M. (2004). Unfulfilled Promise: formative assessment using computer-aided assessment. *Learning and Teaching in Higher Education*, Issue 1, 67-80.
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The power of feedback, *Review of Educational Research*, 77 (1), 81-112.
- Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- MIUR (2012). Indicazioni Nazionali per la Scuola dell'Infanzia e per il Primo Ciclo di Istruzione. *Annali della pubblica Istruzione*. Le Monnier.
https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360-0ca6-48fb-95e9-c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262
- Pierri A (2020). Formative peer-review practices in online environment to promote the undergraduate students' mathematical thinking. *Quaderni di ricerca in didattica*, vol. 8, pp. 53-60.
- Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Behavioural Science*, 28(1), 4 –13
- Sabena, C., Albano, G., Pierri A, (2020). Formative assessment workshops as a tool to support pre-service teacher education on argumentation *Quaderni di ricerca in didattica*, vol. 7, pp. 205-2015.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53–82). Mahwah, NJ: Erlbaum.