

## FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. Comprueba en cada caso si las fracciones dadas son equivalentes:

a)  $\frac{x+2}{3x+6} y \frac{1}{3}$       b)  $\frac{x^2+x}{x^2} y \frac{x+1}{x}$

c)  $\frac{3x}{x^2-x} y \frac{3}{x-2}$       d)  $\frac{3x-3}{9x^2-9} y \frac{1}{3x-3}$

Sol: a) Sí; b) Sí; c) No; d) No

2. Calcula:

a)  $\frac{1}{3x} + \frac{3}{2x} - \frac{1}{x}$       b)  $\frac{2}{3x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^2}$       c)  $\frac{3}{x} - \frac{x}{x-1}$       d)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

Sol: a)  $\frac{5}{6x}$ ; b)  $\frac{4x+3}{6x^2}$ ; c)  $\frac{-x^2+3x-3}{x(x-1)}$ ; d)  $\frac{2}{x^2-1}$

3. Saca factor común y luego simplifica:

a)  $\frac{5x+5}{3x+3}$       b)  $\frac{x^2-3x}{2x-6}$       c)  $\frac{x^2+x}{x^2-1}$       d)  $\frac{12x}{4x^2+2x}$

Sol: a)  $\frac{5}{3}$ ; b)  $\frac{x}{2}$ ; c)  $\frac{x}{x-1}$ ; d)  $\frac{6}{2x+1}$

4. Recuerda los productos notables, descompón en factores y simplifica:

a)  $\frac{x^2-1}{x+1}$       b)  $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$       c)  $\frac{x^2-4}{2x-4}$       d)  $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

e)  $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$       f)  $\frac{x(x+2)}{x^2+4x+4}$       g)  $\frac{x^2-6x+8}{x^2-9}$       h)  $\frac{x^2-9}{x^4-81}$

Sol: a)  $x-1$ ; b)  $\frac{x+1}{x-1}$ ; c)  $\frac{x+2}{2}$ ; d)  $\frac{x+2}{x-2}$ ; e)  $\frac{x-4}{x+4}$ ; f)  $\frac{x}{x+2}$ ; g)  $\frac{x-3}{x+3}$ ; h)  $\frac{1}{x^2+9}$

5. Descompón en factores el dividendo y el divisor y después simplifica:

a)  $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$       b)  $\frac{x^2+2x-3}{x^3-x^2}$       c)  $\frac{x^3+4x^2+3x}{x^2+x-6}$       d)  $\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$

Sol: a)  $\frac{x}{x-2}$ ; b)  $\frac{x+3}{x^2}$ ; c)  $\frac{x^2+x}{x-2}$ ; d)  $\frac{x+3}{x+5}$ ;

6. Opera y simplifica:

a)  $\left(\frac{4}{x} - x\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)$       b)  $\frac{x+2}{(x+2)^2} \cdot \frac{x^2-4}{x}$

c)  $\left[\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}\right) : \left(x - \frac{1}{x+1}\right)\right] \cdot x$

d)  $\frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{2}{x} : \frac{1}{x+2}\right)$       e)  $\left(\frac{3}{x^2} + \frac{x+2}{x} - \frac{x+1}{x-2}\right) \cdot 2x^2$

Sol: a)  $4-2x$ ; b)  $\frac{x-2}{x}$ ; c)  $3x+2$ ; d)  $x^2+2x$ ; e)  $-\frac{x^2+x+2}{x^2(x-2)}$

7. Reduce a una sola fracción y resuelve:

a)  $-\frac{x^2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = 0$       b)  $\frac{x+3}{x^2-2x+1} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 0$

c)  $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+5}{x+2} = 0$

Sol: a)  $x=2, x=0$ ; b)  $x=3, x=-1/3$ ; c)  $x=0$

8. Haz las operaciones indicadas y simplifica:

a)  $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$       b)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{x+y}{xy}\right) \cdot \frac{2xy}{x+y}$

c)  $\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x+1}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)$

Sol: a)  $4$ ; b)  $\frac{4y}{x+y}$ ; c)  $\frac{3x+1}{x}$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\frac{1+x}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{3x+5}{x^2-x-6}$       b)  $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1}$

$$\text{c) } \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \frac{x+2}{x+1} - 2 \qquad \text{d) } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{7x+2}{x^2-4}$$

Sol: a)  $x=1$ ,  $x=-2/5$ ; b)  $x=0$ ,  $x=-1/2$ ; c)  $x=-4$ ; d)  $x=3$ ,  $x=0$

10. Opera:

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{x-1}{x^2-4x+3} \qquad \text{b) } \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x-2}$$

$$\text{c) } \frac{x}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-3x+2} \qquad \text{d) } \frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{x+2}{x^2+x-2}$$

$$\text{Sol: a) } \frac{1}{x-1} ; \text{ b) } \frac{3x+4}{x^2+x-2} ; \text{ c) } \frac{-3x+5}{x^2-x-2} ; \text{ d) } \frac{2-3x}{x^2-1}$$

11. Simplifica:

$$\text{a) } \frac{\frac{9+6x+x^2}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2-x^3}{3x^2+x^3}}{\frac{2x-4}{3/4+2/8} \cdot \frac{2x^2-8x+8}{x-2}}$$

$$\text{b) } \frac{x^2+6x+5}{x^2-5x+4} \cdot \frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x^3-2x}{x^2-4x}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{4x^2-4x}{x+1}}{\frac{2x^2+14x+20}{x^3-50+2x^2-25x} \cdot \frac{x-5}{2x^3-20x^2+50x}}$$

$$\text{d) } \frac{\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{2x^2-8x-10}{x-1}}{\frac{2x+2}{x^2+x-2} \cdot \frac{x+1}{x^3-4x^2-7x+10}}$$

$$\text{e) } \frac{\left( \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-9} \cdot \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} \right) \cdot \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}}{\frac{2x^2-2x}{3x^2+3x-6} - \frac{3x^2+12x+12}{2x}}$$

$$\text{f) } \frac{1 + \frac{x-3}{x+3}}{\frac{3-x}{3x}} - \frac{\frac{x+3}{x} - \frac{x+3}{3}}{x-3} - 1$$

$$\text{g) } \left( \frac{x^3+x^2-6x}{x^2+x} - \frac{x^2-9}{x^3+6x^2+9x} \right) \cdot \frac{x^2-5x+6}{x^2+x}$$

$$\text{h) } \frac{1 + \frac{x}{y}}{\frac{x^2-y^2}{xy-y^2}}$$

$$\text{i) } \frac{\frac{a^2-1}{a+1} - \frac{a^2+1}{a-1}}{a+1 - \frac{a^2-1}{a-1}} \cdot \left( \frac{a^2+1}{a} - \frac{a^2-2a+1}{(a-1)^2} \right)$$

$$\text{j) } \frac{1 + \frac{a+b}{a-b}}{1 - \frac{a+b}{a-b}}$$

Sol: a)  $\frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 10x + 18}{(x-1)(x-4)(x+2)}$ ; b)  $\frac{x(x-3)}{3}$ ; c) 1; d) 1; e) 1; f)  $\frac{x(x-3)}{3}$ ; g) 1;

h) 1; i)  $\frac{a^2}{(a^2+1)^2}$ ; j)  $-\frac{a}{b}$

12. Simplifica:

a)  $\frac{a^2+6a+9}{a^2-9} \cdot \frac{a^2+9}{a^4-81}$       b)  $\frac{2a^2-4ab+2b^2}{3x-6} \cdot \frac{a-b}{4x-8}$

c)  $\frac{16-x^4}{4x+8} : (32-8x^2) =$       d)  $\frac{16-x^4}{4x+8} : (32+8x^2) =$

e)  $\frac{\frac{36}{x+y}}{6} : \frac{\frac{3x}{x+y}}{1} =$       f)  $\frac{x^2-4}{a^2-b^2} \cdot \frac{x-2}{a+b} =$

g)  $\frac{2y}{y-1} - \frac{y-1}{3y} - \frac{3-y}{y} =$       h)  $\frac{y}{y-2} - \frac{y}{y^2-3y+2} - \frac{y}{y-1} =$

Sol: a)  $(a+3)^2$ ; b)  $8(a-b)/3$ ; c)  $\frac{4+x^2}{32(x+2)}$ ; d)  $\frac{2-x}{32}$ ; e)  $\frac{2}{x(x+y)}$ ;

f)  $\frac{x+2}{a-b}$ ; g)  $\frac{2(4y^2-5y+4)}{3y(y-1)}$ ; h) 0

13. Opera y simplifica cuando sea posible:

a)  $\frac{3+x}{3-x} - \frac{1}{-x-3} - \frac{x^2}{9-x^2} =$       b)  $\frac{1}{y^2-y} + \frac{2y+1}{y^2-1} + \frac{y}{y+1} =$

c)  $\frac{\frac{x^2-3x-10}{x^3-2x^2-4x+8} \cdot \frac{x^2-4}{x-5}}{\frac{x+2}{3-x} \cdot \frac{6x-2x^2}{2x^2-4x}} =$       d)  $\frac{x^4-3x^3}{x^4-6x^3+9x^2} =$

e)  $\frac{2x^2+5x+2}{2x^3+x^2-8x-4} =$       f)  $\frac{2x+6}{x^2-3x} - \frac{x+5}{x^2-4x+3} + \frac{x-1}{2x-6} =$

Sol: a)  $\frac{5x+12}{(x+3)(3-x)}$  ; b)  $\frac{y^3+y^2+2y+1}{y(y-1)(y+1)}$  ; c) 1; d)  $\frac{x}{x-3}$  ; e)  $\frac{1}{x-2}$  ; f)  $\frac{x^3-x-12}{2x(x-3)(x-1)}$

14. Divide y comprueba:

a)  $z^5-2z^4-3z^3+6z^2+2z-4 : z^2-2$

b)  $x^5-3x^2-1 : x^2-1$

c)  $y^6-3y^4+3y^3+2 : y^3-y+1$

Sol: a)  $z^3-2z^2-z+2$ ; b) C: $x^3+x-3$ , R: $x-4$ ; c) C: $y^3-2y+2$ , R: $-2y^2+2y$

15. Halla a para que  $x^3-ax+125$  sea divisible entre  $x+5$ . Sol:  $a=0$

16. Hallar el valor que toma el polinomio  $p(x) = x^2-6x+1$  para  $x=2-\sqrt{5}$ . Sol:  $2\sqrt{5}-5$

17. Opera y simplifica:

a)  $\frac{x-1}{x^2+2x+1} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

b)  $\frac{x}{x^2-x} + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2-1} =$

c)  $\frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

d)  $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} =$

e)  $\frac{1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} =$

f)  $\frac{x-1}{x^2+x} - \frac{3(x-1)}{x} + \frac{2x}{x+1} =$

g)  $\frac{x+2}{x^2-x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3x}{x^2-1} =$

Sol: a)  $\frac{-x^3-3x}{(x^2+2x+1)(x-1)}$  ; b)  $\frac{3x+1}{x^2-1}$  ; c)  $\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$  ; d)  $-\frac{x}{x^2-1}$  ; e)  $\frac{-x-3}{x^2-1}$  ;  
 f)  $\frac{-x^2+x+2}{x^2+x}$  ; g) 1; h)  $\frac{2x^2+x+2}{x(x^2-1)}$

18. Opera y simplifica si es posible:

a)  $\frac{\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1}} =$

b)  $\frac{\frac{x^2-2x+1}{x-1} - \frac{x^2-1}{x+1}}{\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1}} =$

$$\frac{\frac{2x-2x^2}{(x+1)^2} - \left( \frac{x^2+3x+2}{(x-1)^2} - \frac{x^2-x+1}{x-1} \right)}{\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} + \frac{x^2-2x+1}{(x+1)^2}} = \frac{\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x^2+2x+1}{x+1}}{\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2+x-6}} =$$

$$\text{c) } \frac{x^2+2x-3}{x-1} + \frac{3x+1}{2x} - \frac{x^2-2x+1}{3x} = \text{d) } \frac{\frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2} - \frac{x^2-x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{x^2+2x+1}{x+1}} =$$

$$\text{g) } \frac{x-1}{x-1} + \frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} = \text{h) } \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{3}{(x-1)^2} =$$

$$\text{Sol: a) } -x; \text{ b) } 0; \text{ c) } \frac{x^3-3x^2-x-3}{x^2+3}; \text{ d) } \frac{x(x+3)(x^2-3x+2)}{2}; \text{ e) } \frac{4x^2+31x+1}{x^2+3};$$

$$\text{f) } \frac{-x^2+2x-2}{x^2}; \text{ g) } \frac{x^2+4x+11}{(x+3)(x+1)}; \text{ h) } \frac{2x^3-3x^2-4x-1}{(x^2-1)(x-1)}$$

19. Opera y simplifica:

$$\text{a) } \frac{\frac{x^2+3x+2}{x+2}}{(x+2)(x+1)} = \text{b) } \frac{x^2-1}{x+2} + \frac{3x-3}{x+3} - \frac{x-3}{x^2+5x+6} =$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-3}{x^2+5x+6} = \text{d) } \frac{x-1}{x+2} - \frac{3x-3}{x+3} + \frac{2x-2}{x+2} =$$

$$\text{e) } \frac{x-2}{x+1} - \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+2}{x+1} = \text{f) } \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{2x}{x-1} =$$

$$\text{Sol: a) } \frac{1}{x+2}; \text{ b) } \frac{x^3+6x^2+x-6}{x^2+5x+6}; \text{ c) } \frac{2x^2-6}{x^2+5x+6}; \text{ d) } \frac{3(x-1)}{(x+3)(x+2)}; \text{ e) } \frac{x^2+6x+1}{(x+3)(x+1)};$$

$$\text{f) } \frac{2x^2+5x-5}{x^2-1}$$

20. Opera y simplifica:

$$\text{a) } \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} =$$

$$\text{b) } \frac{3x}{x-1} - \frac{x+2}{x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1} =$$

$$\text{c) } \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x+5}{x-5}} =$$

$$\text{d) } \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-25}{x^2-4x-5}} =$$

$$\text{e) } \frac{\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} + \frac{x}{x-1}}{\frac{x^2-6x+5}{x^2-1}} =$$

$$\text{f) } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2-1} =$$

Sol: a)  $\frac{x+5}{x+1}$  ; b)  $\frac{2x^2-x+3}{x^2-1}$  ; c)  $\frac{x-5}{x+1}$  ; d) 1; e)  $\frac{x+5}{x-5}$  ; f)  $\frac{2x^2}{(x-1)^2(x+1)}$